

## Capítulo 7

### Fuentes de Campo Magnetostático

7.1.	<u>Introducción</u>	7-2
7.2	<u>Ley de Biot y Savart</u>	7-3
7.3	<u>Una forma alternativa para llegar a la Ley de Biot y Savart (opcional)</u>	7-4
7.4	<u>Campos magnéticos generados por distribuciones lineales de corrientes</u>	7-7
7.4.1	<u>Ejemplo 1: Cable recto de longitud <math>L</math> por el que circula una corriente <math>I</math></u>	7-8
7.4.2	<u>Ejemplo 2: Cable curvo (segmento circular) de longitud <math>L</math> por el que circula una corriente <math>I</math></u>	7-13
7.5	<u>Campos magnéticos generados por distribuciones superficiales y volumétricas de corrientes</u>	7-15
7.5.1	<u>Ejemplo 3: Distribución cilíndrica volumétrica de corriente uniforme</u>	7-17
7.5.2	<u>Ejemplo 4: Distribución cilíndrica superficial de corriente uniforme en la dirección del eje</u>	7-18
7.6	<u>Campos magnéticos generados por distribuciones muy usadas y útiles</u>	7-20
7.6.1	<u>Solenoides</u>	7-20
7.6.2	<u>Toroide</u>	7-24
7.7	<u>Buscando una manera más simple de determinar campos magnetostáticos</u>	7-24
7.8	<u>La Ley de Ampere válida para todos los campos magnetostáticos en el vacío</u>	7-27
7.9	<u>Cálculo de campos magnetostáticos a partir de la Ley de Ampere</u>	7-30
7.9.1	<u>Ejemplo 5: Distribución volumétrica de corriente uniforme de forma cilíndrica infinita</u>	7-31
7.9.2	<u>Ejemplo 6: Toroide de <math>N</math> espiras densamente arrolladas y sección rectangular</u>	7-32

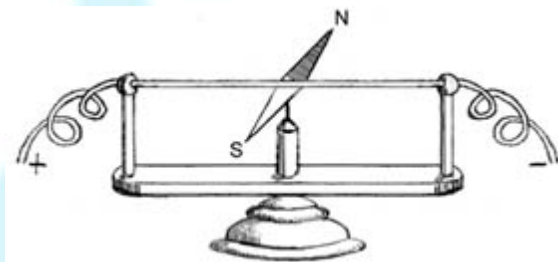
### 7.1. Introducción

En el Capítulo 6 analizamos la fuerza magnética ejercida sobre una carga que se mueve en un campo magnético externo  $\vec{B}_{ext}$ . Para completar las descripciones trataremos de dilucidar qué es lo que provoca ese  $\vec{B}_{ext}$ .

Hagamos una analogía: un campo eléctrico externo  $\vec{E}_{ext}$  ejerce una fuerza sobre una carga  $q_1$  (se me ocurre llamarla así) quieta y, por otra parte, otra carga quieta, llamada  $q$ , crea un campo eléctrico  $\vec{E}$ . Sabemos que un campo magnético  $\vec{B}_{ext}$  ejerce una fuerza sobre una carga en movimiento. Entonces nos preguntamos si una carga en movimiento crea un campo  $\vec{B}$  (todo por buscar simetrías en la Naturaleza... muy griego).

Una Carga estática	➔	Crea un Campo electrostático
Un Campo electrostático	➔	Ejerce fuerza sobre una carga
Un Campo magnético	➔	Ejerce fuerza sobre una carga que se mueve
Una Carga que se mueve	➔	¿¿Crea un Campo magnético??

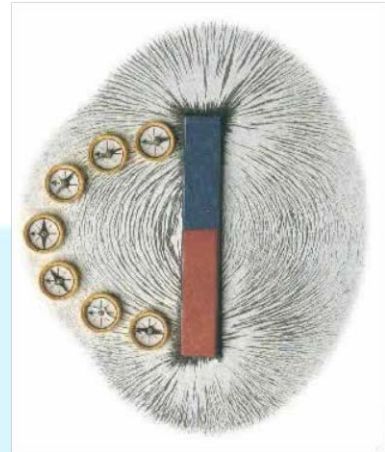
En 1820 Oersted era profesor de Física de la Universidad de Copenhague. Se sospechaba que existía una relación entre la electricidad y el galvanismo (porque ambas producían sacudones). Él tenía también una idea vaga acerca de alguna relación oculta entre el magnetismo y la electricidad. Llevaba a cabo experiencias donde colocaba una brújula cerca de cables por los que circulaba corriente.



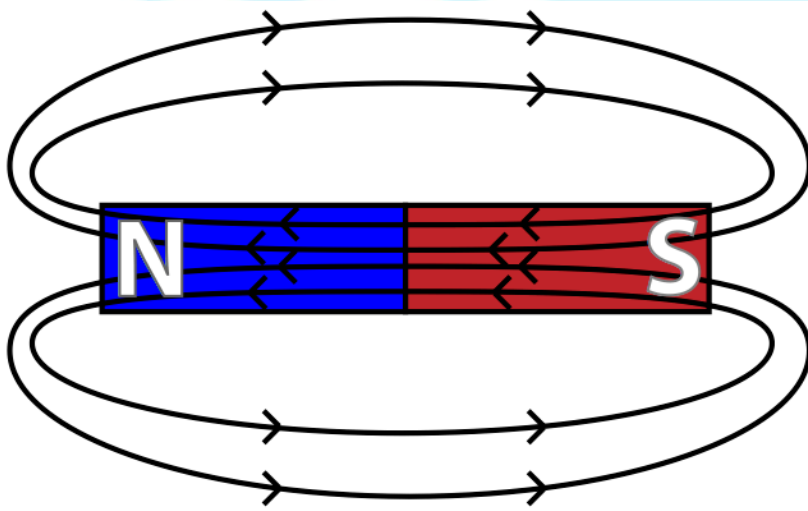
Cuando decidió poner el cable paralelo a la brújula, ésta sorprendentemente giró y se ubicó perpendicular al cable. Y si invertía la corriente galvánica, se invertía el sentido de giro. No entendía qué pasaba (ni se lo dijo a sus alumnos, según

cuentan). Es decir, la brújula se movía como en presencia de un poderoso imán.

Enseguida, varios científicos se pusieron a hacer experiencias similares y determinaron que la fuerza magnética sufrida por la brújula (cerca de un cable recto que conducía una corriente constante) era tal que hacía que la aguja se ubicaba siempre perpendicular al cable. Y el cable también atraía limaduras de hierro e imantaba barras de hierro, como los conocidos imanes. Se pudo pensar entonces que la corriente, o sea cargas en movimiento, generaba algún tipo de campo magnético.



Antes de adentrarnos en el tema de cuánto campo magnético genera una dada corriente, queremos comentar algo relativo a una propiedad básica del campo magnético. La figura inmediata anterior muestra un imán cuyos extremos han sido pintados rojo y azul. Para visualizar las líneas de campo se ha espolvoreado polvo de hierro y colocado algunas brújulas para más ayuda. Es fácil visualizar las líneas de campo; podríamos trazarlas desde el lado azul (tomado como punto de arranque) hacia el rojo (tomado como punto de destino). Un experimento más complicado muestra que dentro de la barra del imán las líneas de campo apuntan desde el rojo hacia el azul, formando en total una línea cerrada (ver figura siguiente)



Las líneas de campo de  $\vec{B}$  son cerradas sobre sí mismas. No tienen punto de comienzo ni de fin. No hay fuentes ni sumideros. Un campo vectorial que carece de fuentes y sumideros se llama solenoidal (un nombre). Al carecer de fuentes y sumideros el flujo de dicho campo a través de cualquier superficie cerrada debe ser nulo:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

O por el teorema de la divergencia:

$$\text{div}(\vec{B}) = 0$$

Esta es una diferencia con respecto al campo eléctrico que tiene fuentes (las cargas positivas) y sumideros (las cargas negativas).

Por otra parte, si miramos la figura anterior y nos preguntamos por la circulación del campo magnético a lo largo de una curva cerrada, encontramos que podemos obtener un valor positivo si vamos a favor o negativo si vamos en contra, pero no cero:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \neq 0$$

O por el teorema del rotor:

$$\text{rot}(\vec{B}) \neq 0$$

También diferente del campo eléctrico.

## 7.2. Ley de Biot y Savart

Jean-Baptiste Biot y Félix Savart y muchos más hicieron experiencias cuantitativas para determinar la fuerza que una corriente (generada gracias a las pilas de Volta) ejercía sobre un imán cercano. Alrededor de 1820, de los resultados experimentales, Biot y Savart llegaron a una expresión matemática que da el valor de la intensidad del campo magnético  $\vec{B}$  en un punto  $\vec{r}$  del espacio cuando una corriente constante fluye por un alambre conductor. Es decir, una corriente eléctrica, fluyendo por un alambre conductor, o cargas en movimiento, produce un campo magnético que decrece inversamente con la distancia al conductor. También podemos pensarlo como la creación de una zona del espacio (alrededor del conductor) donde se pueden detectar fuerzas magnéticas.

Que la corriente no varíe en el tiempo (decimos que es constante) significa que hay un flujo continuo desde siempre y para siempre. En realidad, tal corriente no existe en realidad (como tampoco existe una carga quieta de verdad).

Cuando considerábamos que teníamos cargas en reposo, hablábamos de **Electrostática**. Ahora, que consideramos corrientes que no fluctúan ni interrumpen su devenir, hablaremos de **Magnetostática**. Por supuesto que no existen tales cosas. “En ese sentido tanto la Electrostática como la Magnetostática describen mundos artificiales que solo existen en los libros de texto. Sin embargo, ellas representan *aproximaciones* adecuadas mientras se cumpla que las fluctuaciones reales sean razonablemente lentas; de hecho, para la

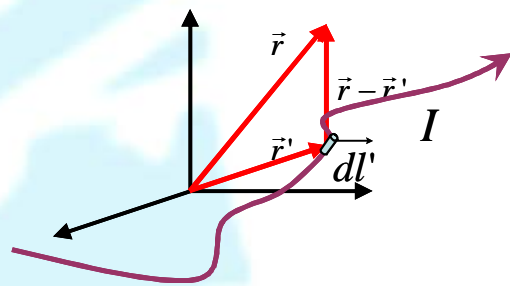
mayoría de los propósitos la Magnetostática se aplica muy bien a las corrientes hogareñas, que varían 50 veces por segundo”<sup>1</sup>

Cuando una corriente constante fluye por un alambre conductor, su valor  $I$  debe ser el mismo a lo largo de él. Si no fuera así, la carga se estaría “apilando” en algún lugar, y no sería entonces una corriente constante. Es decir, si tomáramos un volumen y calculáramos la  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$ , no nos daría cero. En ese caso, la carga en un punto estaría variando con el tiempo. I.e.  $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ .

Resumiendo, cuando estamos en Magnetostática, debe ser necesariamente  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ . El campo magnético  $\vec{B}(\vec{r})$  generado por un alambre conductor por el que circula una corriente uniforme  $I$  se podrá calcular por la Ley de Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (7.1)$$

donde  $d\vec{l}'$  es el vector tangente a la línea de flujo de cargas,  $\vec{r}$  determina el lugar donde se quiere calcular el campo magnético y  $\vec{r}'$  indica la posición de las cargas que se mueven. También podríamos pensar que  $d\vec{l}'$  es un



elemento diferencial de longitud a lo largo del alambre,  $\vec{r}$  la posición de los puntos “campo” y  $\vec{r}'$  la de los puntos “fuente”. La constante  $\mu_0$  se denomina **permeabilidad** del vacío y su valor **en el Sistema Internacional de Unidades** es  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$ . Que las unidades sean  $N/A^2$  provienen de cuáles son las unidades de campo magnético.<sup>2</sup>

La Ley de Biot-Savart cumple en Magnetostática mismo papel que la Ley de Coulomb cumple en Electroestática. Observemos que la dependencia  $1/r^2$  es común a ambas.

### 7.3. Tema especial 1. Una forma alternativa para llegar a la Ley de Biot y Savart

<sup>1</sup> En otros países varía 60 veces por segundo.

<sup>2</sup> Como  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ , las unidades de campo magnético corresponden a  $[B] = T = [\mu_0] C \frac{m/s}{m^2}$ . En consecuencia

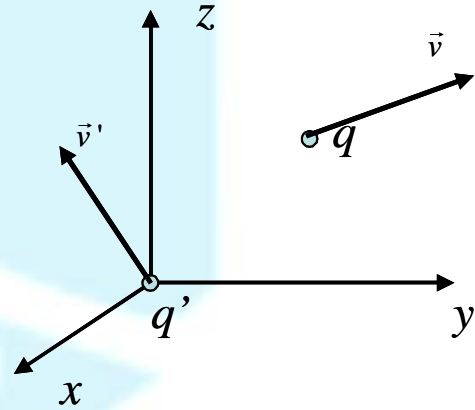
$$[\mu_0] = \frac{Tms}{C} = \frac{Ns}{Cm} \frac{ms}{C} = \frac{Ns^2}{C^2} = \frac{N}{A^2}$$



Las experiencias realizadas a través de muchos años manifestaron que solamente una carga generaba un  $\vec{B}$  cuando ella estaba en movimiento.

¿Cómo averiguar el  $\vec{B}$  que produce una partícula con carga  $q$  que se mueve con velocidad  $\vec{v}$ ?

Para eso podemos hacer la siguiente experiencia pensada: ponemos una carga  $q'$  en el origen de coordenadas que tenga una velocidad  $\vec{v}'$  en el instante  $t_0$ . En ese mismo momento medimos la fuerza que aparece en otra carga  $q$  que se mueve con  $\vec{v}$  y que está en la posición  $\vec{r}$ . Es decir, el campo magnético externo sería el producido por  $q'$  en movimiento. Para seguir este razonamiento debemos suponer que las cargas se mueven con **velocidades muy bajas respecto de la velocidad de la luz**. Considerando que la fuerza ejercida sobre la carga  $q$  en movimiento y ubicada en la posición  $\vec{r}$  está dada por la fuerza de Lorentz  $\vec{F}_m(\vec{r}) = q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})$  los resultados obtenidos muestran que el campo magnético generado por la carga  $q'$  en ese instante debe valer

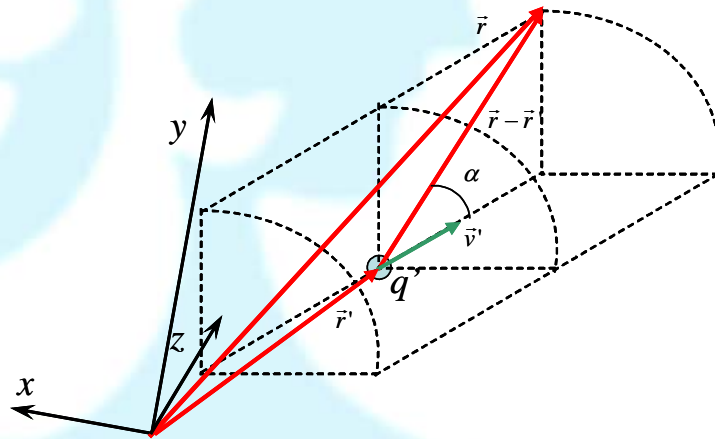


$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q' \vec{v}' \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (7.29)$$

Si la carga  $q'$  estuviera en la posición  $\vec{r}'$ , el resultado sería

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q' \vec{v}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (7.3)$$

Es decir, los resultados experimentales llevan a que



$$\vec{F}_m(\vec{r}) = q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q\vec{v} \times \left( \frac{q' \vec{v}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \quad (7.4)$$

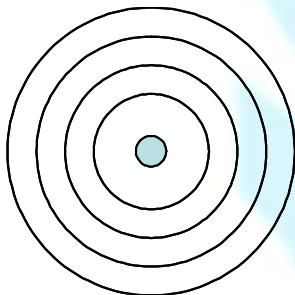
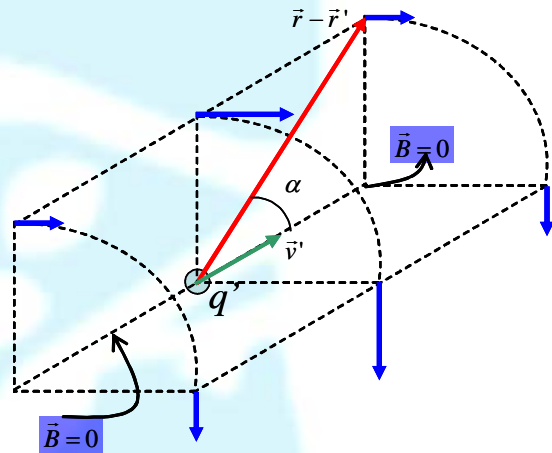
Analicemos cómo se llega a este resultado.

- 1) Si  $(\vec{r} - \vec{r}') // \vec{v}'$ , es decir, si en el instante  $t$  las cargas  $q$  y  $q'$  determinan una recta paralela a la velocidad  $\vec{v}'$ , la fuerza  $\vec{F}_m(\vec{r})$  sobre la carga  $q$  es nula, independientemente de su velocidad.

- 2) Si las velocidades de las cargas son paralelas entre sí y perpendiculares a la recta que une a ambas cargas, la fuerza  $\vec{F}_m(\vec{r})$  sobre la carga  $q$  es máxima.
- 3) La  $\vec{F}_m(\vec{r})$  depende de  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  y es inversamente proporcional al cuadrado del mismo
- 4) La  $\vec{F}_m(\vec{r})$  depende del ángulo que forman  $(\vec{r} - \vec{r}')$  y  $\vec{v}'$ , y también del ángulo entre el plano generado por  $(\vec{r} - \vec{r}')$  y  $\vec{v}'$  y la velocidad  $\vec{v}$ .

De esta manera las características del campo magnético generado por la carga  $q'$  que se mueve con velocidad  $\vec{v}'$  resultan

- 1) Si  $\vec{r} - \vec{r}' // \vec{v}' \Rightarrow \vec{B} = 0$
- 2)  $|\vec{B}|$  depende de  $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-2}$
- 3)  $\vec{B} \perp \vec{v}'$  y  $\vec{B} \perp (\vec{r} - \vec{r}')$
- 4)  $|\vec{B}| = f(\alpha) = g(\sin \alpha)$



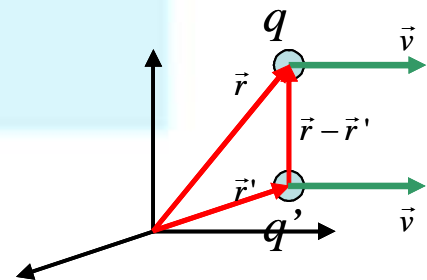
Así, en un instante  $t$  las líneas de campo son circunferencias centradas en la carga  $q'$ .

Vamos a comparar las fuerzas eléctrica y magnética entre dos cargas. Si tenemos una carga  $q'$  en el vacío ubicada en  $\vec{r}'$  y que se mueve con velocidad  $\vec{v}'$  generará un campo eléctrico y otro magnético en el punto  $\vec{r}$ , siendo

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q' \vec{v}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (7.5)$$

y las fuerzas que sufrirá una carga  $q$  que se mueve con  $\vec{v}$  (medida en el mismo sistema de referencia) en el punto  $\vec{r}$  serán



$$\vec{F}_e(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qq' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (7.6)$$

$$\vec{F}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} qq' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \vec{v} \times (\vec{v}' \times (\vec{r} - \vec{r}')) \quad (7.7)$$

Para tener una idea de órdenes de magnitud, consideremos dos cargas que se mueven con la misma velocidad. La fuerza magnética sobre la carga  $q$  (si ambas son positivas) será de atracción y su módulo estará dado por

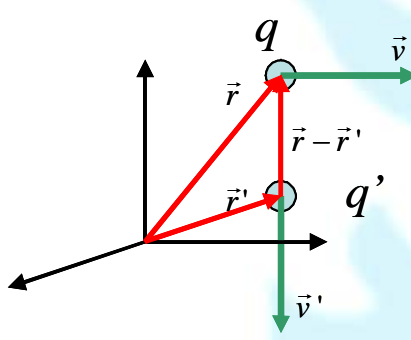
$$\vec{F}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} qq' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \vec{v} \times (\vec{v}' \times (\vec{r} - \vec{r}')) \Rightarrow |\vec{F}_m(\vec{r})| = \frac{\mu_0}{4\pi} q' q \frac{v^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \quad (7.8)$$

mientras que la fuerza eléctrica (de repulsión) tendrá módulo  $|\vec{F}_e(\vec{r})| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qq' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$

En consecuencia, la relación entre sus valores resulta

$$\frac{|\vec{F}_e|}{|\vec{F}_m|} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} qq' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}}{\frac{\mu_0}{4\pi} q' q \frac{v^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}} = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0 v^2} \approx \frac{9 \times 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2}{v^2} \gg 1 \quad (7.9)$$

**Observación inquietante:** Si tenemos dos cargas en movimiento como se indica en la figura y analizamos las fuerzas magnéticas de una sobre otra, tendremos



$$\vec{F}_{q' \rightarrow q} = \frac{\mu_0}{4\pi} q\vec{v} \times \left( q' \vec{v}' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right)$$

$$\vec{F}_{q \rightarrow q'} = \frac{\mu_0}{4\pi} q' \vec{v}' \times \left( q\vec{v} \times \frac{(\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right)$$

Pero resulta que  $\vec{v}' \parallel (\vec{r} - \vec{r}')$  con lo que  $\vec{F}_{q' \rightarrow q} = 0$   
 $\vec{F}_{q \rightarrow q'} \neq 0$ .

Es decir, no se cumple el **principio de acción y reacción**. ¿Está esto en contradicción con la tercera Ley de Newton? La tercera Ley de Newton equivale a un principio más general que es la conservación de la cantidad de movimiento. Cuando hay campos magnéticos y eléctricos, estos transportan cantidad de movimiento (lo verán en Electromagnetismo). Y así se salva este aparente fracaso de la tercera Ley de Newton.



## Fin tema especial 1

### 7.4. Campos magnéticos generados por distribuciones lineales de corrientes

Retomamos la 7.1

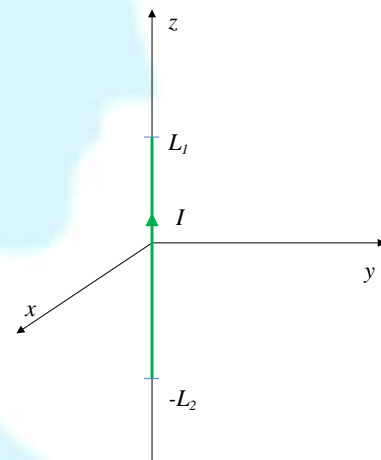
$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Resulta ahora un desafío calcular el campo magnético generado por una distribución lineal de corriente ya que debemos describir con mucho detalle qué representan los vectores  $d\vec{l}'$  (cómo fluye la corriente),  $\vec{r}'$  (dónde están los portadores de carga) y  $\vec{r}$  (dónde se quiere calcular el campo magnético).

#### 7.4.1 Ejemplo 1: Cable recto de longitud $L$ por el que circula una corriente $I$

Vamos ahora a calcular el campo magnético generado por una porción recta de largo  $L$  de un circuito más complejo que puede tener una forma totalmente arbitraria.

Lo primero que debemos hacer es dibujar nuestro objeto de estudio y un sistema de coordenadas adecuado con el fin que perseguimos. “Copiándonos” lo que hicimos en Electrostatica para una distribución lineal de cargas, podemos ubicar a este trozo de conductor en el eje  $z$  de coordenadas (ya aprendimos que esta ubicación va a tener la propiedad de hacer que el sistema en estudio tenga simetría de revolución alrededor del eje  $z$  “de cilíndricas” y simplifica la generalización porque se puede calcular en el plano  $yz$  o  $xz$  y luego generalizar para cualquier punto  $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$ ). Pero hay que tener mucho cuidado: usar una terna derecha (lo que siempre elegimos para usar lo que sabemos de Álgebra). Podríamos haber usado siempre terna izquierda y operar de esa manera, pero la costumbre es usar la terna derecha). Para hacerlo en forma muy general, consideraremos que el conductor está ubicado entre  $L_1$  y  $-L_2$  de forma tal que  $L_1 + L_2 = L$  y que la corriente tiene el sentido indicado en la figura. Vale la pena señalar que este ejemplo tiene un problema importante: en



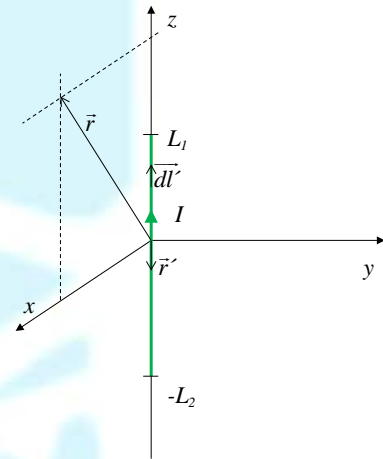
$-L_2$  aparece de la nada una corriente que desaparece en  $L_1$ . Es una contradicción respecto del principio de conservación de la carga; la carga no puede aparecer o desaparecer. Salvamos el problema pensando que hay algo antes de  $-L_2$  y algo después de  $L_1$ , pero que sólo estamos calculando el campo magnético generado por el tramo recto.

En la expresión  $d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$  debemos identificar cada variable.

1)  $d\vec{l}'$  indica la dirección en que se mueven de los portadores de carga, i.e.  $d\vec{l}' = dz' \vec{e}_z$ <sup>3</sup>. El sentido de la corriente (que coincide con la velocidad de arrastre) va a estar especificado cuando establezcamos los límites de la integral.

2)  $\vec{r}'$  indica dónde están los portadores de carga que generan el campo magnético. En este caso están ubicados sobre el eje  $z$  por lo que escribiremos  $\vec{r}' = z' \vec{e}_z$ . Por supuesto no son todos los puntos sobre el eje  $z$  sino solamente los que están entre  $-L_2$  y  $L_1$ .

3)  $\vec{r}$  es el punto campo, es decir, el punto donde queremos determinar el campo. No es una variable de integración y podemos elegir, por ejemplo, que esté sobre el plano  $xz$  o sea,  $\vec{r} = x \vec{e}_x + z \vec{e}_z$ .



Entonces:

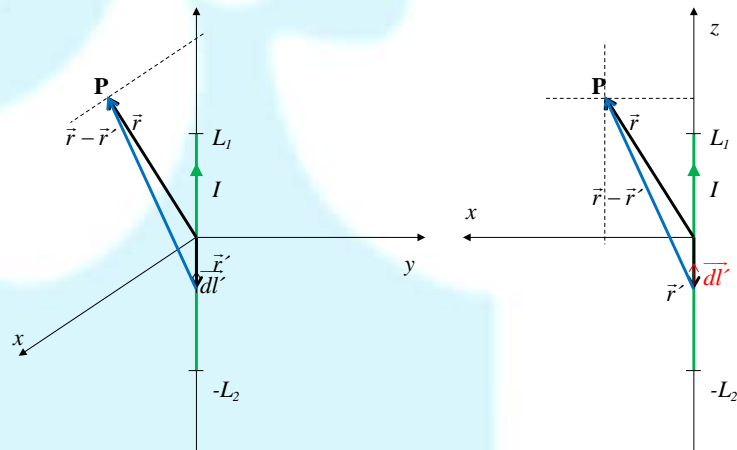
$$\vec{r} - \vec{r}' = x \vec{e}_x + (z - z') \vec{e}_z;$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + (z - z')^2};$$

$$d\vec{l}' = dz' \vec{e}_z.$$

Primero vamos a tratar de deducir algunas características del campo magnético generado

sobre el plano  $xz$ . Como el dibujo tridimensional puede confundir por el tipo de “perspectiva” utilizada, también lo haremos bidimensional para que quede claro en qué plano están los



<sup>3</sup> Recordar que los versores cartesianos están fijos en el espacio una vez que se estableció el sistema de coordenadas.

vectores involucrados. Cuando realicemos el producto vectorial  $d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')$ , el vector resultante será saliente del papel. Es decir, el “diferencial de campo magnético” tendrá la dirección  $y$ . Y así para cada uno de los  $d\vec{l}'$ . El campo total será (por el principio de superposición) la suma de todos los “diferenciales de campo”, por lo que el campo resultante en el punto  $\mathbf{P}$  ubicado en el plano  $xz$ ,  $\vec{B}(\mathbf{P})$ , tendrá dirección  $\vec{e}_y$ .

Para calcular el producto vectorial analíticamente podemos hacerlo por el “método del determinante” o “a pedal” (propiedad distributiva). Usemos el método “a pedal” en este ejemplo:

$$d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = dz' \vec{e}_z \times [x \vec{e}_x + (z - z') \vec{e}_z] = x dz' \vec{e}_z \times \vec{e}_x + dz'(z - z') \vec{e}_z \times \vec{e}_z = x dz' \vec{e}_z \times \vec{e}_x = x dz' \vec{e}_y$$

Entonces, 
$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{x dz' \vec{e}_y}{[x^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$
 (¡dirección que era de

esperar!). La única variable de integración es  $z'$  (de ahí la importancia de distinguir entre puntos campo y fuente). La variable  $z'$  es la que varía entre  $-L_2$  y  $L_1$  si la corriente tiene el sentido de la figura y entre  $L_1$  y  $-L_2$  si va en sentido contrario. Por lo tanto, como  $I$  es la misma en todos los puntos y  $x$  y  $z$  corresponden a un punto cualquiera del plano  $xz$ , obtenemos

$$\vec{B}(x, 0, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I x \int_{-L_2}^{L_1} \frac{dz' \vec{e}_y}{[x^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

Tampoco el versor cartesiano depende del punto de integración, por lo que el campo magnético en el plano  $xz$  solamente tendrá componente  $y$ :

$$B_y(x, 0, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I x \int_{-L_2}^{L_1} \frac{dz'}{[x^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

Esta integral (de tabla) es del tipo  $\int \frac{d\zeta}{[a^2 + \zeta^2]^{3/2}} = \frac{\zeta}{a^2 [a^2 + \zeta^2]^{1/2}}$  donde

$$\zeta \equiv z - z', \quad d\zeta \equiv -dz' \quad \text{y} \quad a^2 \equiv x^2$$

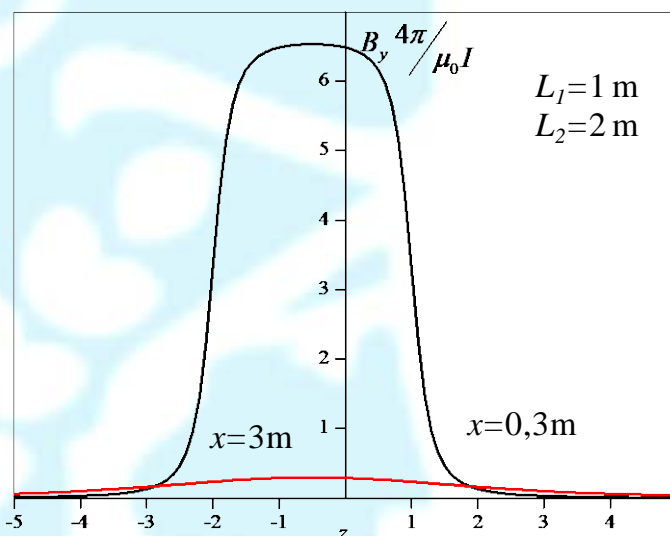
$$\int \frac{dz'}{[x^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \int \frac{-d\zeta}{[a^2 + \zeta^2]^{3/2}} = -\frac{\zeta}{a^2 [a^2 + \zeta^2]^{1/2}} = -\frac{(z - z')}{x^2 [x^2 + (z - z')^2]^{1/2}}$$

$$B_y(x, 0, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_x \int_{-L_2}^{L_1} \frac{dz'}{[x^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_x \frac{(z - z')}{x^2 [x^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \Bigg|_{-L_2}^{L_1} =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{(z - z')}{x [x^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \Bigg|_{-L_2}^{L_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{x} \left[ \frac{(z + L_2)}{[x^2 + (z + L_2)^2]^{1/2}} - \frac{(z - L_1)}{[x^2 + (z - L_1)^2]^{1/2}} \right]$$

Este resultado diverge en  $x=0$  **pero** si observamos la expresión original de  $B_y(x, 0, z)$ , ésta se anula en  $x=0$ , es decir, es nula sobre el eje  $z$  (como era de esperar porque la velocidad de los portadores tiene dirección  $z$ ).

Si graficamos la componente  $y$  del campo en función de  $z$  para dos valores de  $x$ , obtenemos el resultado de la figura. Por supuesto que no es simétrica respecto de  $z$  debido a cómo ubicamos el “hilo” con corriente. ¿Cómo lo deberíamos haber ubicado para que fuera simétrica la gráfica? ¿O en qué valor de  $z$  es máximo el valor del campo?



¿Cómo se puede justificar conceptualmente? ¿Cómo hubiera sido el gráfico si se hubiera tomado  $x$  con valores negativos?

Ahora falta generalizar el resultado a todo el espacio. Debido a la simetría de revolución, la componente  $y$  en el plano  $xz$  corresponde a la componente  $\varphi$  de coordenadas cilíndricas. Y la variable  $x$  a la coordenada  $\rho$  de coordenadas cilíndricas. En consecuencia, podemos escribir que el campo magnético generado por esta distribución en todo el espacio está dado por

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[ \frac{(z + L_2)}{[x^2 + y^2 + (z + L_2)^2]^{1/2}} - \frac{(z - L_1)}{[x^2 + y^2 + (z - L_1)^2]^{1/2}} \right] \vec{e}_\varphi$$

Donde hemos usado componentes cilíndricas y variables cartesianas (¡un híbrido!). También podríamos escribirlo tanto en componentes como variables cartesianas

$$\begin{aligned}\vec{B}(x, y, z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[ \frac{(z + L_2)}{[x^2 + y^2 + (z + L_2)^2]^{1/2}} - \frac{(z - L_1)}{[x^2 + y^2 + (z - L_1)^2]^{1/2}} \right] (-\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y) = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \left[ \frac{(z + L_2)}{[x^2 + y^2 + (z + L_2)^2]^{1/2}} - \frac{(z - L_1)}{[x^2 + y^2 + (z - L_1)^2]^{1/2}} \right] \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} \vec{e}_x + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{e}_y \right)\end{aligned}$$

O todo en cilíndricas

$$\vec{B}(\rho, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{\rho} \left[ \frac{(z + L_2)}{[\rho^2 + (z + L_2)^2]^{1/2}} - \frac{(z - L_1)}{[\rho^2 + (z - L_1)^2]^{1/2}} \right] \vec{e}_\varphi$$

Ahora vamos a deducir cómo es el campo generado en dos casos especiales: la longitud del alambre recto es tal que, dentro de las condiciones e incertezas experimentales, puede considerarse como “semi-infinito”. Supongamos, entonces, que  $L_2 = 0$  y  $L_1 \rightarrow \infty$ . Debemos hacer

$$\begin{aligned}\vec{B}(x, y, z) &= \lim_{\substack{L_1 \rightarrow \infty \\ L_2 = 0}} \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[ \frac{(z + L_2)}{[x^2 + y^2 + (z + L_2)^2]^{1/2}} - \frac{(z - L_1)}{[x^2 + y^2 + (z - L_1)^2]^{1/2}} \right] \vec{e}_\varphi = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[ \frac{z}{[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} - \lim_{L_1 \rightarrow \infty} \frac{(z - L_1)}{[x^2 + y^2 + (z - L_1)^2]^{1/2}} \right] \vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

Calculemos el  $\lim_{L_1 \rightarrow \infty} \frac{(z - L_1)}{[x^2 + y^2 + (z - L_1)^2]^{1/2}}$ . Si  $L_1 \rightarrow +\infty$ , el valor del numerador será

negativo para todo  $z$  (excepto en el infinito). Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{L_1 \rightarrow +\infty} \frac{(z - L_1)}{[x^2 + y^2 + (z - L_1)^2]^{1/2}} &= - \lim_{L_1 \rightarrow +\infty} \frac{(L_1 - z)}{[x^2 + y^2 + (z - L_1)^2]^{1/2}} = - \lim_{L_1 \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{(L_1 - z)^2}}{[x^2 + y^2 + (z - L_1)^2]^{1/2}} = \\ &= - \lim_{L_1 \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left[ \frac{x^2 + y^2 + (z - L_1)^2}{(L_1 - z)^2} \right]^{1/2}} = - \lim_{L_1 \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left[ \frac{x^2 + y^2}{(L_1 - z)^2} + 1 \right]^{1/2}} = -1\end{aligned}$$

Entonces para un conductor semi-infinito ubicado sobre el eje  $z$  desde el origen de coordenadas hasta  $z \rightarrow +\infty$  y por el que circula una corriente  $I$  en el sentido de los  $z$  positivos el campo magnético generado resulta



$$\vec{B}_{\text{semi-infinito}}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[ \frac{z}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} + 1 \right] \vec{e}_\varphi$$

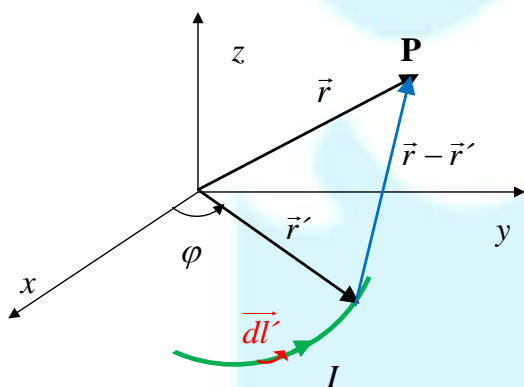
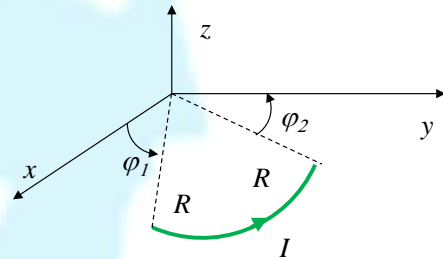
¿Cómo es la expresión del campo magnético en el caso en que el conductor pudiera ser considerado infinito (desde  $-\infty$  a  $+\infty$ )? Deducir que en ese caso

$$\vec{B}_{\text{infinito}}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi$$

Observen que, en esta última condición, el campo no depende de  $z$  (lo que es de esperar porque todos los orígenes de coordenadas son equivalentes). Además, podemos ver cómo son las líneas de campo magnético en el plano  $xy$ : su valor solamente depende de la distancia al eje  $z$  por lo que son circunferencias centradas en el eje  $z$ . Comparen la dependencia de su valor con la distancia con la del campo eléctrico generado por una distribución lineal, recta y uniforme de carga.

#### 7.4.2 Ejemplo 2: Cable curvo (segmento circular) de longitud $L$ por el que circula una corriente $I$

No vamos a calcular con detalle el campo magnético generado por este tipo de distribución. Pero, para fijar la metodología de resolución, vamos a escribir la expresión de los vectores involucrados en la expresión



del campo magnético y hacer algunas observaciones. Primero **debemos** hacer un gráfico (casi imprescindible porque tanta abstracción casi nunca es posible de hacer). Lo intuitivo es hacer coincidir el origen de coordenadas con el “centro” del segmento circular y ubicar la distribución en un plano. ¿Por qué habré elegido el plano  $xy$ ? Para generalizar, el “alambre” comienza en una posición caracterizada por  $R$  y  $\varphi_1$  y termina en otra posición caracterizada por  $R$  y  $\varphi_2$ . ¿Podemos inferir algo acerca de las características del campo generado en todo el espacio? ¿Sobre el eje

caracterizada por  $R$  y  $\varphi_1$  y termina en otra posición caracterizada por  $R$  y  $\varphi_2$ . ¿Podemos inferir algo acerca de las características del campo generado en todo el espacio? ¿Sobre el eje

z? Parece complicado, ¿no?. Vamos entonces a tratar de determinarlo analíticamente. En la figura observamos que

- 1)  $\vec{dl}'$  indica la dirección en que se mueven de los portadores de carga, i.e.  $\vec{dl}' = R d\varphi' \vec{e}_{\varphi'}$  (Observar que el versor tiene un **primado** porque se refiere a la fuente de campo. Este versor va a ir cambiando a medida que cambie el punto fuente). La expresión del diferencial de arco se debe a que el segmento circular está a una distancia **fija** del origen de coordenadas ( $R$ ) y su sentido está dado por el versor acimutal. Como en el ejemplo anterior, el sentido de la corriente (que coincide con la velocidad de arrastre) va a estar especificado cuando establezcamos los límites de la integral.
- 2)  $\vec{r}'$  indica dónde están los portadores de carga que generan el campo magnético. En este caso están ubicados sobre el arco por lo que escribiremos  $\vec{r}' = R \vec{e}_{\rho'}$  (que también es un versor radial primado ya que variará con el punto fuente). Por supuesto no son todos los puntos sino solamente los que están entre  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ .
- 3)  $\vec{r}$  es el punto campo, es decir, el punto donde queremos determinar el campo. No es una variable de integración y podemos elegir cómo escribirlo en forma genérica, es decir, en coordenadas cartesianas, cilíndricas o esféricas:

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z = \rho \vec{e}_{\rho} + z \vec{e}_z = r \vec{e}_r$$

Ya identificados cada uno de los vectores, debemos operar con

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{alambre}} \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (\text{la corriente es la misma a lo$$

largo de todo el alambre). Entonces, reemplazamos (pero vamos operando de a poco)

$$\vec{dl}' = R d\varphi' \vec{e}_{\varphi'} \quad ; \quad \vec{r}' = R \vec{e}_{\rho'};$$

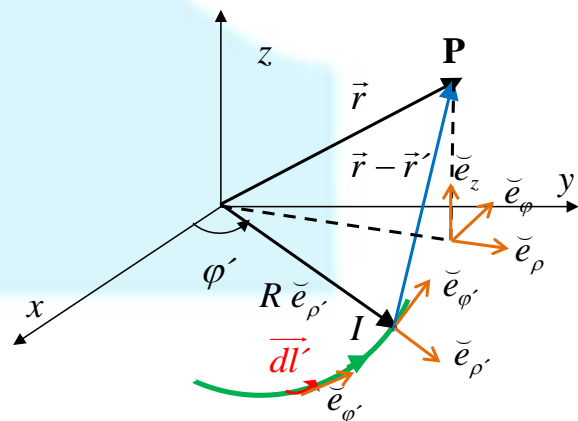
$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z = \rho \vec{e}_{\rho} + z \vec{e}_z = r \vec{e}_r$$

¿Cuál de estas 3 expresiones del vector posición utilizamos? Probemos con la que parece más sencilla para este problema:

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_{\rho} + z \vec{e}_z. \quad \text{Escribamos } \vec{r} - \vec{r}'. \quad \text{Acá}$$

debemos tener mucho cuidado ya que

$$\vec{r} - \vec{r}' = \rho \vec{e}_{\rho} - R \vec{e}_{\rho'} + z \vec{e}_z \quad \text{y no podemos}$$



agrupar los versores radiales  $\tilde{e}_\rho$  y  $\tilde{e}_\rho$ , porque NO APUNTAN EN LA MISMA DIRECCIÓN (ver figura).

Solamente para practicar un poco, vamos a escribir la expresión del campo generado en todo el espacio.

¿Cómo escribimos  $|\vec{r} - \vec{r}'| = |\rho \tilde{e}_\rho - R \tilde{e}_\rho + z \tilde{e}_z|$ ? No parece sencillo porque los versores no son ortonormales. ¿Y el producto vectorial?

$$\overline{d\vec{l}}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = R \tilde{e}_\rho \times (\rho \tilde{e}_\rho - R \tilde{e}_\rho + z \tilde{e}_z) = R \rho \tilde{e}_\rho \times \tilde{e}_\rho - R^2 \tilde{e}_\rho \times \tilde{e}_\rho + z R \tilde{e}_\rho \times \tilde{e}_z$$

Veamos

$\tilde{e}_\rho \times \tilde{e}_z = \tilde{e}_\rho$  ;  $\tilde{e}_\rho \times \tilde{e}_\rho = -\tilde{e}_z$ . Pero no podemos calcular así de fácil  $\tilde{e}_\rho \times \tilde{e}_\rho$  porque son versores no relacionados. En consecuencia, lo que podemos escribir es

$$\overline{d\vec{l}}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = R \rho \tilde{e}_\rho \times \tilde{e}_\rho + R^2 \tilde{e}_z + z R \tilde{e}_\rho$$

Es más: los versores primados van cambiando a medida de que cambia el punto de integración y no los podríamos “sacar fuera de la integral”. Para poder sacar los versores fuera de la integral deben corresponder a los cartesianos o a los no primados (los relacionados con los puntos campo). Desafortunadamente no queda otra posibilidad que escribir a los versores en función de los versores cartesianos y operar.

No pretendemos que resuelvan el problema así planteado para todo el espacio (no son integrales “de las comunes”). Pero sí que puedan determinar el campo magnético en cualquier punto  $\mathbf{P}$  sobre el eje  $z$  de un segmento circular cuyos extremos forman ángulos  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  respecto del origen de coordenadas. Vean cómo se simplifica. Acá solo daremos el resultado final y ustedes deberán poder llegar a ese resultado.

$$B_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{Rz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) \quad B_y = +\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{Rz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)$$

$$B_z = -\frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

### 7.5. Campos magnéticos generados por distribuciones superficiales y volumétricas de corrientes

Vamos a ver cómo extender la Ley de Biot-Savart a distribuciones de corriente superficiales y volumétricas. Primer vamos a establecer claramente a qué llamamos “lineales”, “superficiales” y “volumétricas”. Una distribución de corriente es

- 1) LINEAL si los portadores de carga se “mueven” sobre una curva (1D)
- 2) SUPERFICIAL si los portadores de carga se “mueven” sobre una superficie (2D).
- 3) VOLUMÉTRICA si los portadores de carga se “mueven” dentro de un volumen (3D)

Para poder extender a distribuciones no lineales la Ley de Biot-Savart

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Partimos de la definición de corriente eléctrica. Habíamos definido a la corriente como la cantidad de portadores de carga que pasan en la unidad de tiempo

por un área transversal  $S_0$ , i.e.  $I = \frac{dQ}{dt}$ . La densidad de

corriente volumétrica  $\vec{J}$  se define pensando en la

cantidad de electrones que pasan por unidad de tiempo y por unidad de área transversal  $S_0$ .

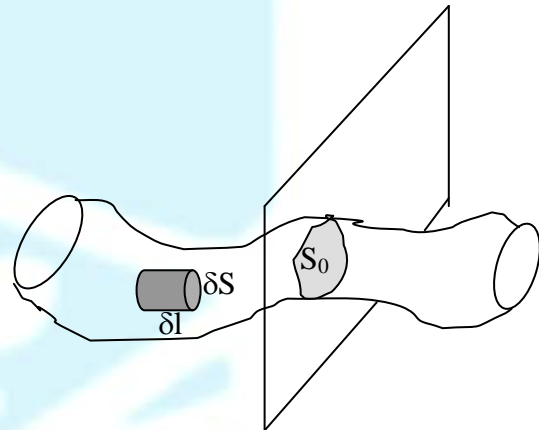
$$J = \frac{Q_{\text{que atraviesa } S_0}}{\text{unidad de } t * S_0}$$

$$|\vec{J}| = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{\delta I}{\delta S} \text{ siendo sus unidades } [J] = A/m^2$$

Generalizando teníamos que la corriente y la densidad volumétrica están relacionadas por

$$I = \iint_{S_0} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

I.e. podríamos escribir  $\delta I = J \delta S$  (aunque no existen los diferenciales de corriente: nos referimos a la cantidad de portadores por unidad de tiempo que pasan por un área diferencial transversal). Lo que sigue no tiene rigurosidad matemática pero nos puede explicar cómo es la Naturaleza. Y como la Física no es una ciencia exacta sino que es una ciencia natural... nos va a servir. Multiplicando ambos miembros por un diferencial perpendicular al diferencial de superficie, tendremos que  $\delta I \delta l = J \delta S \delta l$ . Como  $\delta S \delta l = \delta V$ , podremos escribir  $\delta I \delta l = J \delta V$  donde  $V$  indica volumen (ver dibujo). Y el sentido de  $\vec{J}$  es el de la velocidad de los portadores, i.e., el de  $d\vec{l}'$ .



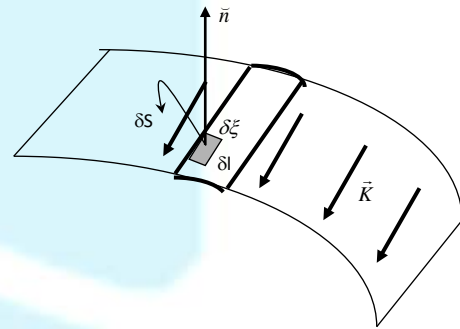
De esta manera, la Ley de Biot-Savart  $d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$  se transforma en

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(\vec{r}') d\mathcal{V}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Si, en cambio, la densidad de corriente fuera superficial (la corriente “va” por una superficie), por un razonamiento análogo podemos llegar a que

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{K}(\vec{r}') dS' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \text{ pues}^4$$

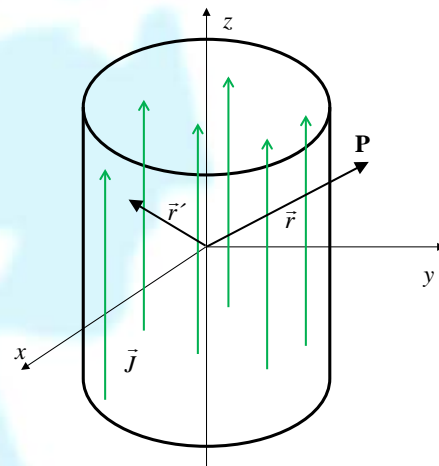
$$K = \frac{\delta I}{\delta \xi} \quad \text{y} \quad K \delta \xi \delta l = \delta I \delta l \text{ siendo } \delta \xi \delta l = \delta S.$$



### 7.5.1 Ejemplo 3: Distribución cilíndrica volumétrica de corriente uniforme

Como siempre elegimos un sistema de coordenadas que nos parezca adecuado para que el planteo del problema sea lo más simple posible. Dibujado, vemos que

$\vec{J} = J \vec{e}_z$  y el punto campo es, en principio cualquiera  $\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z = r \vec{e}_r$ , mientras que  $\vec{r}'$  debe indicar todos los puntos por donde pasan los portadores, es decir,  $\vec{r}' = x' \vec{e}_x + y' \vec{e}_y + z' \vec{e}_z$  donde  $x'$ ,  $y'$  y  $z'$  son puntos de dentro de la distribución cilíndrica. O sea,  $\rho'^2 = x'^2 + y'^2 \leq R^2$  y  $z'$  dependerá de la “altura” de la distribución.



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{portadores}} \frac{\vec{J} d\mathcal{V}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{portadores}} \frac{J \vec{e}_z d\mathcal{V}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

El diferencial de volumen resulta sencillo de expresar en cilíndricas, es decir,  $d\mathcal{V}' = \rho' d\rho' d\phi' dz'$ . Si  $J$  es uniforme, algo se simplifica porque se puede sacar de la integral. De todas maneras, el integrando resulta bastante complicado porque

<sup>4</sup> En forma general  $I = \int (\vec{K} \times \vec{n}) \cdot d\vec{\xi}$



$$\vec{r} - \vec{r}' = (x - x')\vec{e}_x + (y - y')\vec{e}_y + (z - z')\vec{e}_z \quad |\vec{r} - \vec{r}'|^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} J \int_{\text{portadores}} \rho' d\rho' d\varphi' dz' \frac{\vec{e}_z \times ((x - x')\vec{e}_x + (y - y')\vec{e}_y + (z - z')\vec{e}_z)}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

¡Acá lo único fácil es hacer los productos vectoriales!

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} J \int_{\text{portadores}} \rho' d\rho' d\varphi' dz' \frac{(x - x')\vec{e}_y + (y - y')(-\vec{e}_x)}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

Y acá la integral en  $z'$ !

¿Cómo varían las variables de integración?

- 1)  $\rho'$  varía entre 0 y el radio  $R$  de la distribución
- 2)  $\varphi'$  varía entre 0 y  $2\pi$
- 3)  $z'$  depende de cómo es la distribución de “larga”. Como forma general, podemos decir que varía entre  $-L_2$  y  $L_1$ .

Entonces, el campo va a tener dos componentes (como máximo)

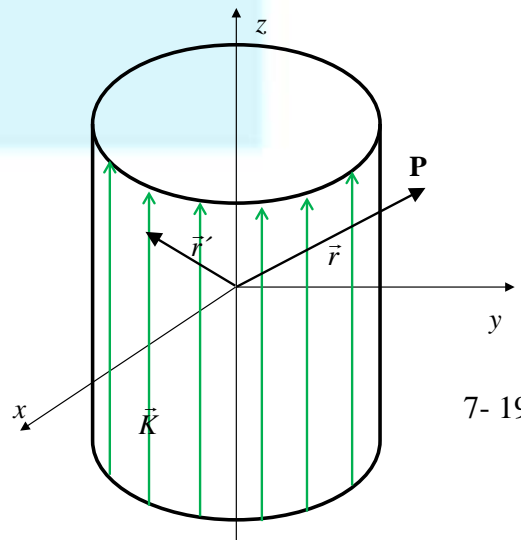
$$B_y(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} J \int_0^R \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L_2}^{L_1} dz' \frac{(x - x')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

$$B_x(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} J \int_0^R \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L_2}^{L_1} dz' \frac{(y - y')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

Pero, si bien no es irresoluble, es muy complicada y no va a aportar mucho aunque consideremos que tiene “altura” infinita. Como para agregar algo, los resultados de estas integrales dependen fuertemente de que el punto  $\mathbf{P}$  esté dentro o fuera de la distribución. Es semejante al problema de Electrostatica de una distribución de carga cilíndrica y uniforme.

Más adelante vamos a ver cómo podemos determinar el campo que genera cuando es “infinita” y la distribución de corriente es uniforme o cumple con ciertas condiciones.

### 7.5.2 Ejemplo 4: Distribución cilíndrica superficial de corriente uniforme en la dirección del eje



Haremos el mismo proceso que en el ejemplo anterior:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{distribución}} \frac{\vec{K} dS' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

La densidad superficial de corriente tiene la dirección de z, i.e.  $\vec{K} = K \vec{e}_z'$ ;  $dS' = R d\phi' dz'$ ; los puntos fuente  $\vec{r}' = x' \vec{e}_x + y' \vec{e}_y + z' \vec{e}_z$  o  $\vec{r}' = R \cos \phi' \vec{e}_x + R \sin \phi' \vec{e}_y + z' \vec{e}_z$  (aunque en este caso podría parecer más sencillo escribir  $\vec{r}' = R \vec{e}_{\rho'} + z' \vec{e}_z$ ) y, como siempre,  $\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z = \rho \vec{e}_{\rho} + z \vec{e}_z$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{distribución}} \frac{\vec{K} dS' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} K \int_{\text{distribución}} R d\phi' dz' \frac{\vec{e}_z \times ((x-x')\vec{e}_x + (y-y')\vec{e}_y + (z-z')\vec{e}_z)}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} K \int_{\text{distribución}} R d\phi' dz' \frac{(x-x')\vec{e}_y + (y-y')(-\vec{e}_x)}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$$

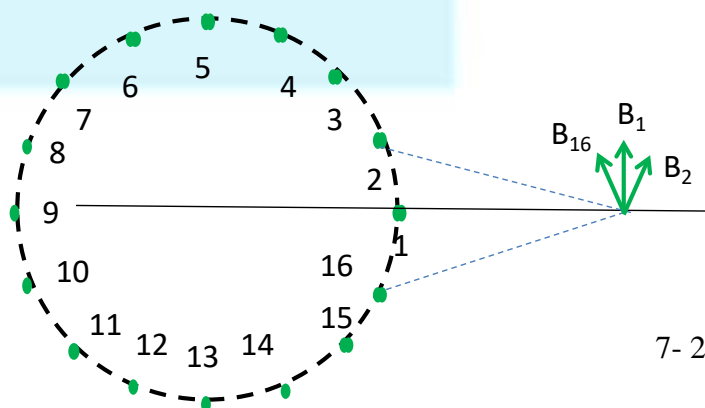
Observen que es el mismo integrando que en el ejemplo anterior, excepto que en ésta se integra sobre solo dos variables. Haciendo todo lo que podamos

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} KR \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-L_2}^{L_1} dz' \frac{(x-x')\vec{e}_y - (y-y')\vec{e}_x}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} KR \int_0^{2\pi} d\phi' [(x-x')\vec{e}_y - (y-y')\vec{e}_x] \int_{-L_2}^{L_1} dz' \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

Una de estas integrales ya la resolvimos (ver la distribución recta lineal). Pero la integral en  $\phi'$  sigue siendo complicada. Veamos cuánto vale el campo magnético sobre el eje z cuando la distribución es “infinita” (i.e. altura infinita).

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} KR \int_0^{2\pi} d\phi' [-x'\vec{e}_y + y'\vec{e}_x] \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{[x'^2 + y'^2 + (z-z')^2]^{3/2}} = \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} KR \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{[-R \cos \phi' \vec{e}_y + R \sin \phi' \vec{e}_x]}{R} = 0 \end{aligned}$$

¿Es de esperar este resultado? Demostrar que éste es el resultado esperado usando el principio de superposición (considerar que es una

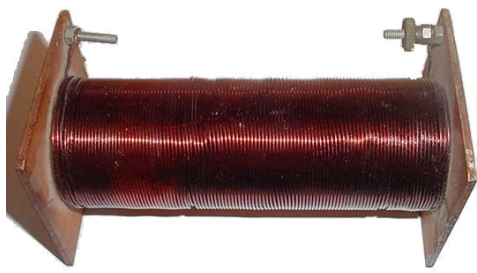


distribución de “alambres” rectos sobre la superficie lateral de un cilindro).

¿Cómo es el campo magnético “fuera” de la distribución cuando es “infinita”? Podemos encontrar la dirección por consideraciones de simetría. La densidad superficial la esquematizamos como los hilos verdes (todos iguales). En un punto cualquiera sumamos los campos individuales (como en la figura). Y deducimos que el campo generado tendrá dirección acimutal.

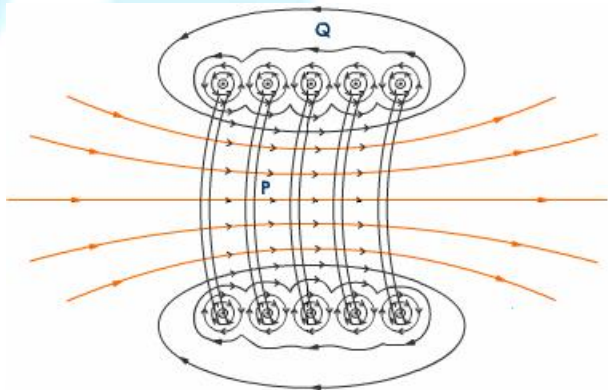
### 7.6. Campos magnéticos generados por distribuciones muy usadas y útiles

El solenoide y el toroide son dos arreglos de cables usados para generar campos magnéticos

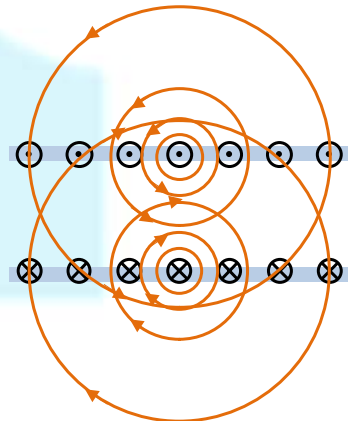


#### 7.6.1 Solenoide

El solenoide es una bobina de alambre devanada uniformemente sobre un cilindro y tiene  $n$  vueltas/unidad de longitud. Si los alambres están uniformemente espaciados, podemos considerar que forman una espiral o helicoides. Pero, como modelo más sencillo, también podemos considerar que es un conjunto de  $N$  espiras circulares. Veamos cómo es el campo cualitativamente. Lo pensamos como producido por cada uno de los elementos por donde circula corriente:



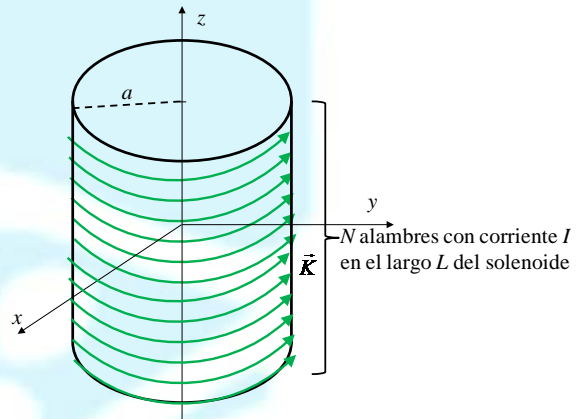
- 1) Cerca de los alambres, los campos forman circunferencias (como conductores rectos). Entonces los campos tienden a anularse entre las espiras y adentro tienden a sumarse dando un campo resultante en la dirección del eje del solenoide.



2) Fuera del solenoide, las espiras de un lado y del otro contribuyen con campos con sentidos diferentes

En consecuencia, los campos debidos a cada espira se refuerzan dentro del cilindro y fuera se dirigen en dirección contraria y se hace más débil. Para determinar estas características hemos hecho uso del Principio de Superposición.

Para hallar la expresión del campo magnético generado se puede proceder de varias maneras. Nosotros haremos un modelo de una corriente superficial  $\vec{K}$  con dirección acimutal sobre la superficie lateral de un cilindro de radio  $a$ . También podríamos considerar un modelo de un apilamiento de espiras circulares y usar el principio de superposición. No pretenderemos



resolverlo en forma analítica para todo punto del espacio, aunque ustedes lo podrían hacer siguiendo los pasos para determinar el campo eléctrico generado por la distribución superficial cilíndrica de carga<sup>ii</sup>. Veamos

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{K} dS' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{K} = K \vec{e}_\varphi = -K \sin \varphi' \vec{e}_x + K \cos \varphi' \vec{e}_y$$

$$dS' = a \, d\varphi' \, dz'$$

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

$$\vec{r}' = a \vec{e}_\rho + z' \vec{e}_z \text{ con } y \text{ y } -L_2 < z' < L_1$$

que en componentes cartesianas resulta

$$\vec{r}' = a (\cos \varphi' \vec{e}_x + \sin \varphi' \vec{e}_y) + z' \vec{e}_z$$

Por la simetría de revolución del problema podemos calcular el campo en el plano  $xz$ , por ejemplo. I.e. en  $y=0$ . Efectuando el producto vectorial

$$\frac{\vec{K} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -K \sin \varphi' & K \cos \varphi' & 0 \\ (x - a \cos \varphi') & (0 - a \sin \varphi') & (z - z') \end{vmatrix} =$$

$$= K \{ \vec{e}_x \cos \varphi' (z - z') + \vec{e}_y \sin \varphi' (z - z') + \vec{e}_z (a \cos \varphi' - x) \}$$

siendo

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = \left\{ (x - a \cos \varphi')^2 + a^2 \sin^2 \varphi' + (z - z')^2 \right\}^{3/2}$$

Entonces

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L_2}^{L_1} dz' \frac{\{ \vec{e}_x \cos \varphi' (z - z') + \vec{e}_y \sin \varphi' (z - z') + \vec{e}_z (a \cos \varphi' - x) \}}{\left\{ (a \cos \varphi' - x)^2 + a^2 \sin^2 \varphi' + (z - z')^2 \right\}^{3/2}}$$

Esta integral (aunque parezca mentira) se puede resolver analíticamente. Sin embargo, no lo haremos. Saquemos algunas conclusiones: las componentes  $x$  e  $y$  deben ser iguales porque son indistinguibles por la simetría de revolución del problema. Pero no tienen por qué anularse.

Ahora haremos el cálculo del campo en el eje  $z$  cuando el solenoide es finito

$$B_x(0, 0, z) = \frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L_2}^{L_1} dz' \frac{\cos \varphi' (z - z')}{\left\{ (a \cos \varphi')^2 + a^2 \sin^2 \varphi' + (z - z')^2 \right\}^{3/2}} =$$

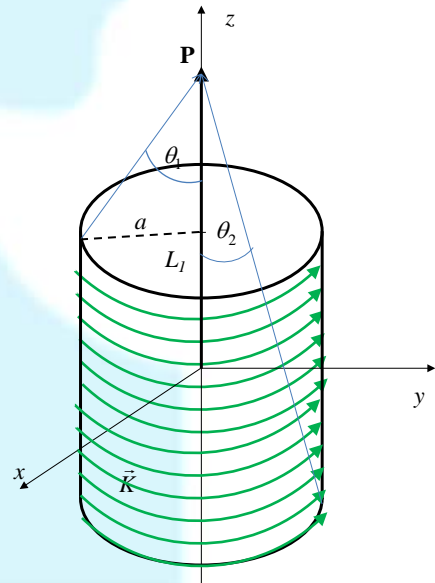
$$= \frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos \varphi' d\varphi' \int_{-L_2}^{L_1} dz' \frac{(z - z')}{\left\{ a^2 + (z - z')^2 \right\}^{3/2}} = 0$$

$$B_y(\vec{r}) = \frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin \varphi' d\varphi' \int_{-L_2}^{L_1} dz' \frac{(z - z')}{\left\{ a^2 + (z - z')^2 \right\}^{3/2}} = 0$$

$$B_z(0, 0, z) = \frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L_2}^{L_1} dz' \frac{a}{\left\{ a^2 + (z - z')^2 \right\}^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 K}{4\pi} 2\pi \int_{-L_2}^{L_1} dz' \frac{a}{\left\{ a^2 + (z - z')^2 \right\}^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 K}{4\pi} 2\pi \int -d\psi \frac{a}{\left\{ a^2 + \psi^2 \right\}^{3/2}} = -\frac{\mu_0 K}{2} \frac{(z - z')}{\left\{ a^2 + (z - z')^2 \right\}^{1/2}} \Bigg|_{-L_2}^{L_1} =$$





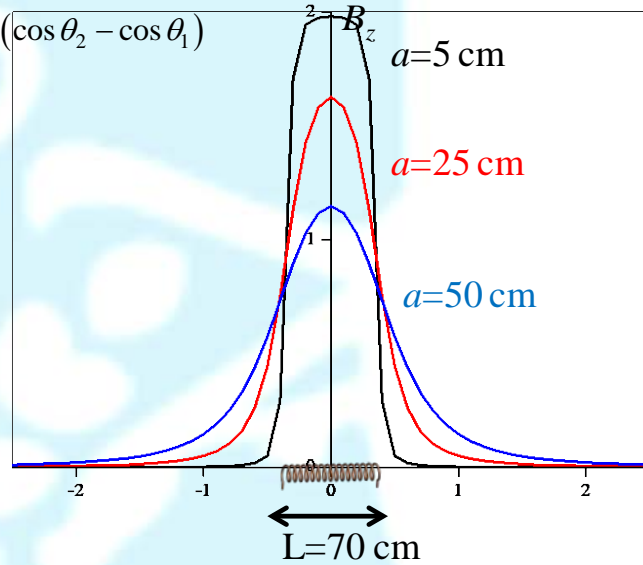
$$= \frac{\mu_0 K}{2} \left\{ \frac{(z+L_2)}{\{a^2+(z+L_2)^2\}^{1/2}} - \frac{(z-L_1)}{\{a^2+(z-L_1)^2\}^{1/2}} \right\}$$

Veamos cómo podemos describir los términos de esta expresión. Como

$$\frac{(z-L_1)}{\{a^2+(z-L_1)^2\}^{1/2}} = \cos \theta_1 \text{ y } \frac{(z+L_2)}{\{a^2+(z+L_2)^2\}^{1/2}} = \cos \theta_2$$

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 K}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) = \frac{\mu_0 NI}{2L} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

La expresión del campo magnético es válida tanto dentro como fuera del solenoide. En la figura mostramos la variación del campo con la posición para tres solenoides de 70 cm de largo y con radios de 5, 25 y 50 cm. El campo fuera del solenoide es menos considerable a medida que el radio del mismo disminuye.

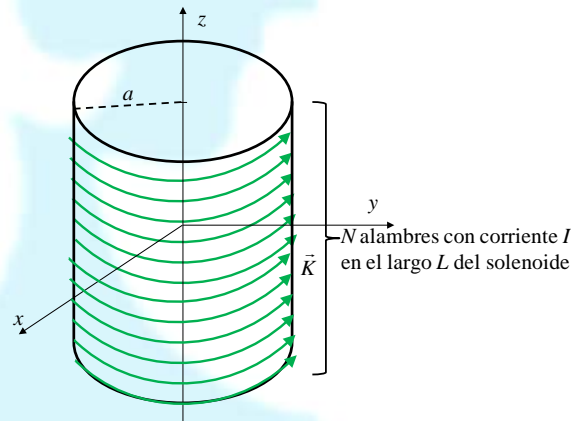


Como en otras oportunidades podemos considerar que un modelo de solenoide “infinito” puede ser útil bajo determinadas condiciones experimentales. Calculamos el campo que genera. Cuando  $L_1$  y  $L_2 \rightarrow +\infty$ ,

$$B_z(0,0,z) = \frac{\mu_0 K}{2} 2 = \mu_0 K = \mu_0 \frac{NI}{L} = \mu_0 nI$$

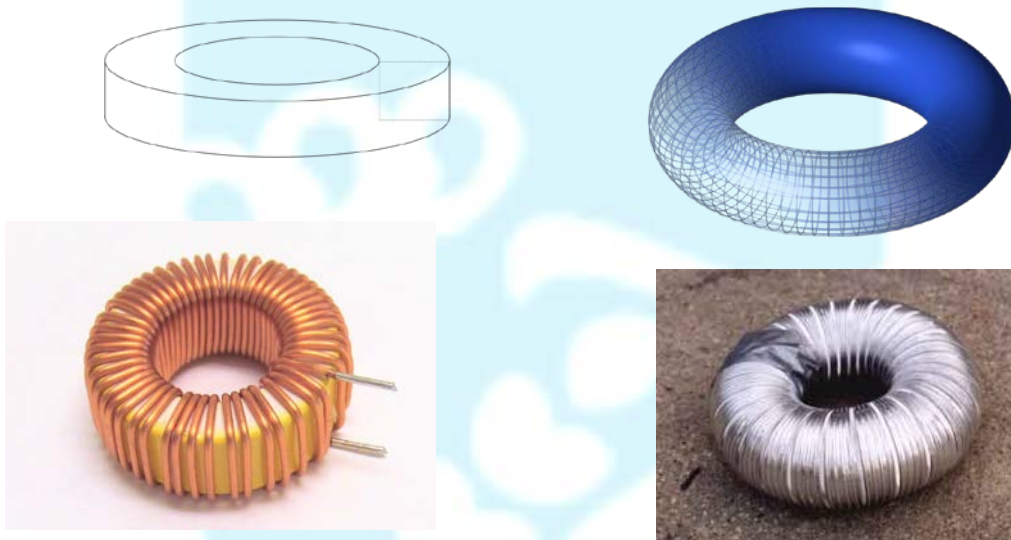
$$B_x(0,0,z) = \frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos \varphi' d\varphi' \int_{-L_2}^{L_1} dz' \frac{\{(z-z')\}}{\{a^2+(z-z')^2\}^{3/2}} = 0$$

pues se anula la integral en  $\varphi'$ . Es decir, lejos de los bordes (o sea, despreciando efectos de borde) el campo magnético dentro del solenoide es uniforme, tiene la dirección del eje del cilindro que lo contiene y vale  $\mu_0 nI$ . El sentido del campo va a depender de cómo circula la corriente.



### 7.6.1 Toroide

Si bien determinar por la Ley de Biot y Savart el campo generado por un solenoide no es nada fácil, mucho más complicado es tratar de determinar el campo generado por un toroide, independientemente de que su sección sea circular, cuadrada o rectangular. Los que estén interesados en el desarrollo matemático, lo encontrarán en la Ref[i].



Sin embargo, a partir del campo obtenido para un solenoide, podemos pensar en que si doblamos al mismo y hacemos coincidir los extremos, tendremos un toroide. El haber encorvado el solenoide hasta obtener una forma circular nos permite pensar que el campo magnético no va a ser muy distinto del obtenido para el solenoide dentro del mismo y que será nulo fuera del toroide. Pero debemos reinterpretar a  $L$ : ahora no será el largo del solenoide sino la circunferencia media del toroide. Y la dirección del campo será tal que copia la forma del toroide. Es decir, formando circunferencias con centro en el centro geométrico del toroide. Más adelante vamos a ver cómo mejorar este modelo.

Antes de continuar queremos hacer notar que el contenido físico de la ley de Biot-Savart es el siguiente:

- a) Las corrientes generan campo magnético en valor proporcional a la corriente.
- b) El campo generado por una corriente disminuye cuando nos alejamos.

El resto es un gran sufrimiento de matemática.

### ***7.7. Tema especial 2. Buscando una manera más simple de determinar campos magnetostáticos***

La Ley de Biot y Savart es útil para encontrar un campo magnético creado por cualquier configuración de corriente constante. Esta forma no siempre resulta óptima ya que es difícil o imposible resolver la integral analíticamente en la mayoría de los casos (incluso, como hemos visto, en aquellos que consideramos idealmente “fáciles”). Lo mismo pasaba en Electroestática. Y en ese caso, pudimos escribir dos ecuaciones integrales y dos diferenciales:

$$1) \text{ Flujo del vector desplazamiento } \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_L \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_L$$

$$2) \text{ Circulación del campo eléctrico } \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

El primer par de ecuaciones (Ley de Gauss para Electroestática) indica que las líneas de campo electrostático nacen en las cargas positivas y mueren en las negativas. Las “fuentes” de campo electrostático son las cargas. La forma integral del primer par nos permitió (algunas pocas veces) reducir el problema ya que no era necesario resolver la integral que corresponde a la Ley de Coulomb. La ecuación diferencial no fue utilizada (aunque se podría haber usado en algunos ejemplos) y será la base de las soluciones que emplearán los que cursen o estudien Electromagnetismo.

El segundo par de ecuaciones indicaba que en Electroestática el campo provenía de un potencial (como función) escalar relacionado con la independencia del camino entre dos puntos al calcular el trabajo ejercido por o sobre una carga (en forma cuasiestática). Y podríamos obtener a partir de esa función potencial el campo electrostático (a través del gradiente).

Tratemos de hacer algo parecido con el campo magnetostático. Calculemos la  $\nabla \cdot \vec{B}$ . Es de esperar, por analogía con el campo electrostático, que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  ya que como dijimos más de una vez: nunca se encontraron monopolos magnéticos. Para probar que la expresión para el campo magnetostático dada por la Ley de Biot y Savart cumple con este resultado experimental, debemos hacer unos cálculos. Escribamos la Ley de Biot-Savart para una distribución de corriente genérica

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{fuentes de corriente}} \frac{\vec{J}(\vec{r}') d\mathcal{V}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Cuando calculemos la  $\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r})$ , la divergencia se realiza con las variables no primadas (las que son de los puntos campo). Como la integral se hace sobre los puntos fuentes:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{fuentes de corriente}} \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}') d\mathcal{V}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{fuentes de corriente}} d\mathcal{V}' \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \vec{\nabla} \cdot \left[ \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] =$$

Buscando la relación adecuada  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{Q}) = \vec{Q} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{Q})$

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}')) - \vec{J}(\vec{r}') \cdot \left( \vec{\nabla} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) = 0 - \vec{J}(\vec{r}') \cdot \left( \vec{\nabla} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right)$$

Porque la densidad de corriente es función de las variables primadas ( $\vec{J}(\vec{r}')$ ).

$$\left[ \begin{array}{ccc} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-x' & y-y' & z-z' \end{array} \right] \frac{1}{\left[ (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{3/2}} \left[ \begin{array}{ccc} \vec{e}_y & \vec{e}_z & \vec{e}_x \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-x' & y-y' & z-z' \end{array} \right] \frac{1}{\left[ (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{3/2}} \left[ \begin{array}{ccc} \vec{e}_z & \vec{e}_x & \vec{e}_y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-x' & y-y' & z-z' \end{array} \right] \frac{1}{\left[ (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{3/2}} + \dots$$

Cuando se hacen las derivadas respecto a  $x, y, z$  se van cancelando y se llega que para todo punto que no sea  $\vec{r}'$ , la divergencia es nula (hacerlo). Es decir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Esto se traduce en la ecuación integral

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Podemos quedarnos tranquilos respecto a la consistencia entre teoría y experiencia (con respecto a no haber encontrado monopolos magnéticos). A esta Ley la llamamos “Ley de Gauss para el campo magnético”. Pero, desafortunadamente, no podemos simplificar nuestra búsqueda de campos magnéticos a través de ella. Aunque, nos da la seguridad de que sea como sea el campo generado por una distribución de corriente, las líneas de campo magnético **deben** ser cerradas.

Pero... no hay que desesperar. Encontraremos una Ley válida para casos magnetostáticos (es decir, no dependientes del tiempo) en que puede resultar más sencillo calcular el campo

magnético. Pero hay que pagar un precio (como cuando aplicábamos la Ley de Gauss para Electrostática): vamos a tener que saber muchas características del campo generado por la distribución. Y recién ahí, calcular su valor en función de las variables del sistema.

## Fin tema especial 2

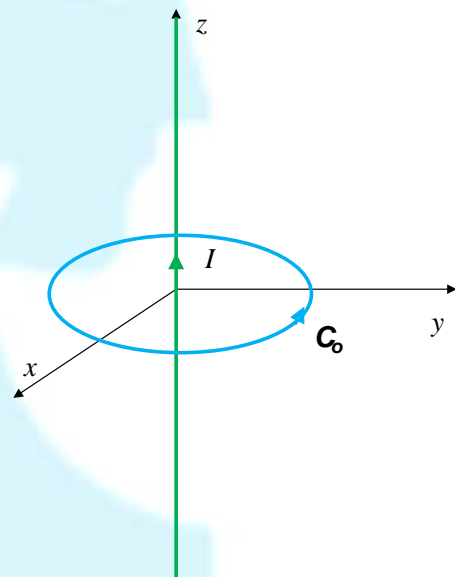
### 7.8. *La Ley de Ampere válida para los campos magnetostáticos en el vacío*

Es posible deducirla a partir de la Ley de Biot y Savart. Solamente hay que aplicar el rotor a la expresión del campo magnético dada por la Ley de Biot y Savart<sup>iii</sup>. Sin embargo lo haremos a partir de un caso particular: a partir del campo magnético creado por un conductor (hilo) infinito por el que circula una corriente  $I$ .

En el **Ejemplo 1** vimos que el campo generado por esta configuración formaba circunferencias centradas en el conductor. Es decir, las líneas de campo magnético son tangentes en cada punto a la circunferencia y para cada radio el módulo del campo magnético era constante ya que

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{1}{\rho} \vec{e}_\phi$$

cuando el sistema de coordenadas elegido es el de la figura. Tomemos ahora una curva  $C_o$  en forma de circunferencia de radio  $R$  y calculemos la circulación del  $\vec{B}(\vec{r})$  que tenemos a lo largo de dicha curva: Esto obliga a usar como valor del campo el que tiene **sobre** la curva  $C_o$



$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \oint_C \frac{1}{R} \vec{e}_\phi \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \oint_C \frac{1}{R} \vec{e}_\phi \cdot R d\phi \vec{e}_\phi = \mu_0 I$$

Lo notable es que resulta independiente del radio de la curva elegida. Es más, lo que resulta independiente es el integrando: el radio  $R$  de la curva se simplifica con el  $R$  del campo. Observen que se ha tenido especial cuidado en ser estrictos en el cálculo de la circulación. Si hubiéramos tomado el sentido contrario de circulación, el resultado hubiera sido negativo. Observen también que el sentido en que se toma la circulación nos “da” un sentido determinado a la normal a la superficie determinada por la curva. Cuando tomamos la



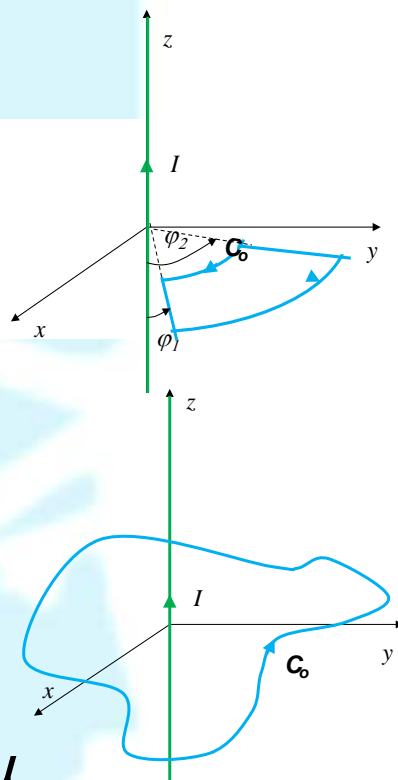
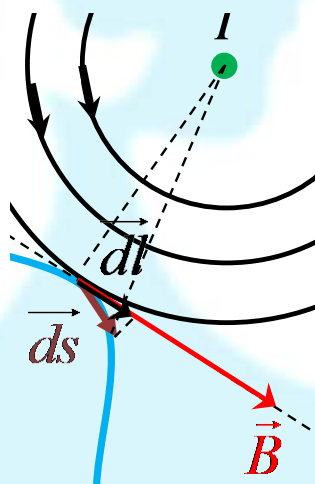
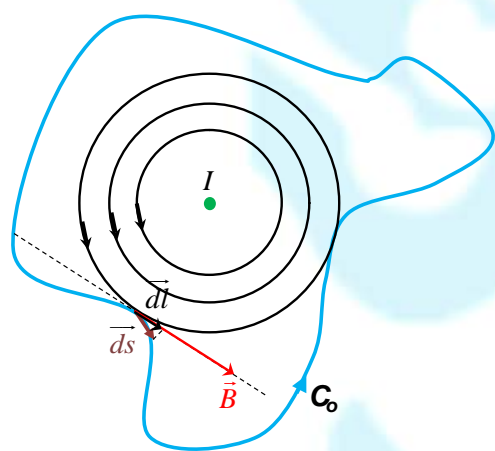
circulación antihoraria, la normal a la superficie relacionada es en sentido de los  $z$  positivos (que coincide con el de la corriente). Hemos encontrado un resultado interesante: **La circulación del campo magnético a través de la curva  $C_0$  es igual a la corriente que atraviesa la superficie determinada por esa curva multiplicada por  $\mu_0$ .**

Vamos a ver cuánto vale la circulación a través de otra curva (muy especial, por supuesto) como la de la figura

$$\oint_{C_0} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = 0 + (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{\mu_0}{2\pi} I + 0 + (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{\mu_0}{2\pi} I = 0$$

Es decir, esta curva no “encierra” a la corriente y la circulación del campo generado por el “hilo” es nula.

Ahora tomemos una curva cualquiera. Pero vamos a dibujarla en el plano para simplificar el dibujo (vista desde “arriba”). Y hacemos zoom.



Cuando hagamos el cálculo de la circulación  $\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$ . El integrando se obtiene proyectando el  $d\vec{s}$  sobre el campo (que es acimutal), es decir, sobre la línea de campo. Entonces, hubiera sido lo mismo que el diferencial  $d\vec{s}$  hubiera sido el  $d\vec{l}$  de la circunferencia, por lo que la contribución a la integral sería la misma. Cuando tomemos otro  $d\vec{s}$ , el valor del

campo sería otro (le correspondería otra línea de campo). Pero, al proyectarlo sobre el campo, es decir, al considerar el  $\vec{dl}$ , la contribución a la integral sería la misma que en el caso anterior (por ser el producto  $\vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$  independiente de  $R$ ).

De esta manera, independientemente de la forma de la curva  $C_o$ ,  $\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$  resulta siempre igual a  $\mu_0 I$  si la corriente está **concatenada** (“encerrada”) por la curva. Si la curva  $C_o$  no concatenara a la corriente, su resultado sería nulo.

Es decir, para un conductor recto infinito,

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \begin{cases} \mu_0 I & \text{si la curva concatena a la corriente} \\ 0 & \text{si la curva no concatena a la corriente} \end{cases}$$

O podemos escribirlo como

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{concatenada}}$$

¿Cómo extendemos este resultado a otras distribuciones de corriente? Por ejemplo, dos hilos conductores que transportan corrientes  $I_1$  e  $I_2$  como en la figura. Tenemos

$$\oint_{C_o} \vec{B}_1(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_1 \quad \oint_{C_o} \vec{B}_2(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_2$$

Como  $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_1(\vec{r}) + \vec{B}_2(\vec{r})$ , será

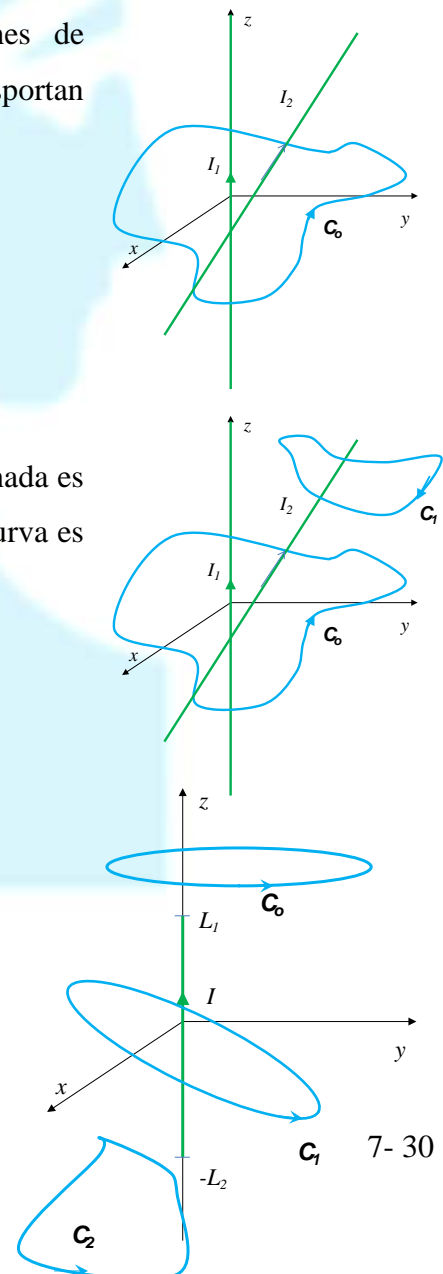
$$\oint_{C_o} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \oint_{C_o} [\vec{B}_1(\vec{r}) + \vec{B}_2(\vec{r})] \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 + I_2)$$

Si, en cambio, la curva elegida es la  $C_1$ , la corriente concatenada es  $I_2$  **pero** como la normal a la superficie determinada por la curva es de sentido opuesto al de la corriente, será

$$\oint_{C_1} \vec{B}_2(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = -\mu_0 I_2$$

Si tenemos un alambre de longitud  $L$  como el de la figura, podemos asegurar que

$$\oint_{C_1} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$



$$\oint_{C_0} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \oint_{C_2} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = 0$$

Para las distribuciones de los **Ejemplos 3 y 4** podemos pensar que es una superposición de muchos conductores lineales. El campo magnetostático es la suma de los campos individuales y para cada "hilo" vale  $\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{concatenada}$ . En consecuencia, si la

densidad volumétrica no depende de la posición

$$\begin{aligned} \oint_{C_0} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} &= \mu_0 I_{concatenada} = \mu_0 \iint_{A(C_0)} \vec{J} \cdot d\vec{A} = \\ &= \mu_0 \iint_{A=\pi R^2} \vec{J} \cdot \vec{n} \, dA + 0 = \mu_0 J \pi R^2 \end{aligned}$$

Si se elige la curva  $C_1$ , la corriente concatenada será solamente una parte de la total. Es decir,

$$\oint_{C_1} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{concatenada} = \mu_0 \iint_{A(C_1)} \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Si la corriente fuera superficial, escribiremos la Ley de Ampere en función de la densidad superficial de corriente. De esta manera

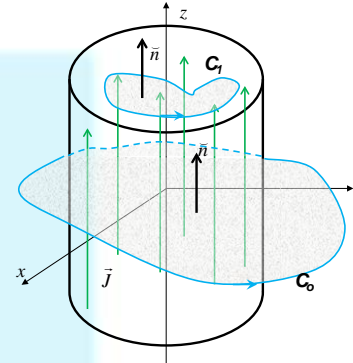
$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{concatenada} = \mu_0 \iint_{A(C)} \vec{J} \cdot d\vec{A} = \mu_0 \int_{L(C)} (\vec{K} \times \vec{n}) \cdot d\vec{l}$$

### 7.9. Cálculo de campos magnetostáticos a partir de la Ley de Ampere

Observemos la expresión de la Ley de Ampere

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{concatenada}$$

Si podemos encontrar una curva donde  $|\vec{B}(\vec{r})|$  no dependa del punto sobre la curva y podemos, por otros medios, conocer la dirección de  $\vec{B}(\vec{r})$  respecto del  $d\vec{l}$  de la curva, podríamos "sacar" de la integral  $|\vec{B}(\vec{r})|$ , multiplicarlo por el perímetro de la curva e igualarlo a la corriente concatenada (a menos de la permeabilidad del vacío). Si conocemos la corriente concatenada... podremos determinar  $|\vec{B}(\vec{r})|$  y le agregamos la dirección que ya sabíamos de antemano. De esta manera, podríamos aprovechar la Ley de Ampere (que vale siempre en Magnetostática) para determinar el campo magnetostático de algunas distribuciones de



corriente de la que ya conocemos bastante (la dirección y su dependencia posible con las coordenadas). Si no hubiéramos sabido todo eso no podríamos haber elegido la curva!!!

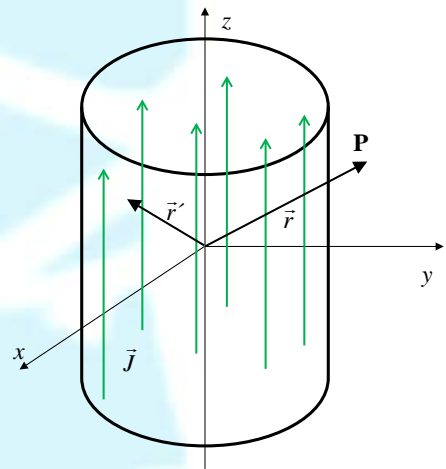
Desafortunadamente son muy pocas las distribuciones de corriente que permiten usar la Ley de Ampere con el fin de determinar el campo magnético que generan.

Vamos a ver algunos ejemplos:

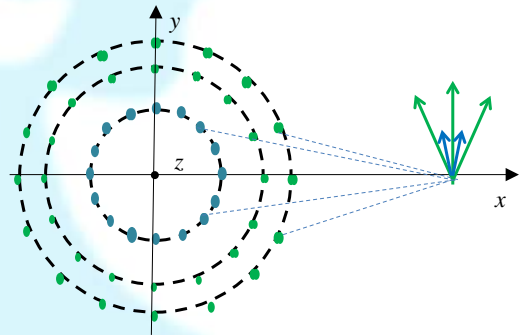
**7.9.1 Ejemplo 5: Distribución volumétrica de corriente uniforme de forma cilíndrica infinita**

Tomemos la distribución del **Ejemplo 3**. Si bien, como vimos, la Ley de Ampere sirve para cualquier curva cerrada, es **imprescindible** saber las características que tendrá el campo para poder usar la Ley de Ampere con el objetivo de determinar el campo magnético generado por la distribución.

Vamos a ver qué características podemos “descubrir” del campo a partir del campo generado por un alambre recto por el que circula una corriente  $I$ . Con esto (ya casi todo sabido) nos fijaremos si existe una curva sobre la cual podamos integrar y “sacar” de la integral el valor de  $\vec{B}$ .



El **Primer Paso** es **inferir** la dirección que tendrá el campo. Hacemos un esquema: la densidad volumétrica uniforme “en sentido de las  $z$ s positivas” la representamos como superposición de infinitos alambres (no infinitos necesariamente), cada uno con una  $I_j$  (igual para todos los alambres) de forma tal que



$I = \sum I_j \rightarrow I = \int_{\text{sección circular}} \vec{J} \cdot d\vec{S}$ . El esquema del campo producido por 5 de los alambres muestra

que, haciendo la superposición, el campo sobre el eje  $x$  tendrá dirección  $y$ ; sobre el eje  $y$  tendrá dirección  $-\vec{e}_x$ , y así para cada plano alrededor del eje  $z$ . En el sistema de coordenadas elegido (¡imprescindible dibujarlo!) el campo tendrá dirección  $\vec{e}_\varphi$ . Podemos afirmar entonces

que  $\vec{B}(\vec{r}) = B(\vec{r})\vec{e}_\varphi$ . Entonces tenemos que

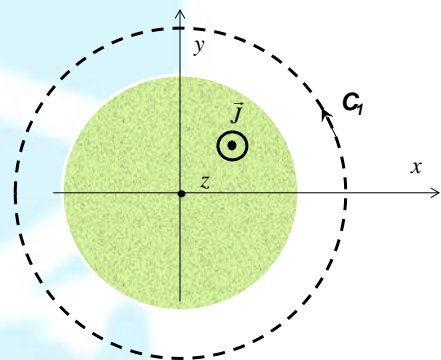
$$\oint_C \mathbf{B}(\vec{r}) \vec{e}_\varphi \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{concatenada por } C}$$

Ya vemos que, si como curva elegimos una circunferencia de radio  $R$  centrada en el origen de coordenadas,  $d\vec{l} = R d\varphi \vec{e}_\varphi$ , tendremos

$$\oint_C \mathbf{B}(\vec{r}) \vec{e}_\varphi \cdot d\vec{l} = \oint_C \mathbf{B}(\vec{r} = R \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z) \vec{e}_\varphi \cdot R d\varphi \vec{e}_\varphi = \oint_C \mathbf{B}(\vec{r} = R \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z) R d\varphi = \mu_0 I_{\text{concatenada por } C}$$

donde  $\vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y$  depende del ángulo  $\varphi$ . Entonces, con esto no alcanza: debemos probar que el campo no va a depender de  $\varphi$ . O sea, debemos probar que es  $B(r, z)$  para poder poner su valor sobre la curva, es decir, poner  $B(R, z)$ .

De la figura que usamos para la superposición, podemos deducir que el valor del campo no va a depender de  $\varphi$  **si  $J$  no depende de  $\varphi$** : una rotación del sistema de coordenadas no cambiará tampoco el valor del campo. Entonces



$$\oint_C \mathbf{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \oint_C B(R, z) R d\varphi = R B(R, z) \oint_C d\varphi = \mu_0 I_{\text{concatenada por } C}$$

donde  $B(R, z)$  indica que el campo solo podría depender de  $R$  y de  $z$ . Pero acá aparece otro problema: la posible dependencia en  $z$ . Está claro que si la distribución fuera “infinita” en  $z$ , el campo solo podría depender de  $R$  (subir o bajar el origen de coordenadas o el alambre, no cambiaría nada).

Pero si fuera finita, tendríamos dos problemas: 1) el campo va a depender de  $z$  y 2) Si subimos o bajamos la curva  $C$ , la corriente concatenada sería distinta en distintos valores de  $z$ . Y existen dos valores de  $z$  donde su valor es discontinuo (donde empieza y donde termina la distribución). Esta discontinuidad inhabilita el uso en caso de que la distribución sea finita (pensarlo para un solo alambre). En consecuencia, debemos exigir que la distribución sea infinita **para poder usar la Ley de Ampere para determinar el campo**. Bajo esas condiciones

$$\oint_C \mathbf{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \oint_C B(R) R d\varphi = R B(R) \oint_C d\varphi = \mu_0 I_{\text{concatenada por } C}$$

Ahora cambiemos  $R$  por un valor genérico  $\rho$



$$\rho B(\rho) 2\pi = \mu_0 I_{\text{concatenada por } C} = \mu_0 \iint_{S(C)} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Observemos que si el radio de la curva es mayor o igual que el radio  $a$  de la distribución, la integral sobre la superficie es nula fuera de la distribución. Es decir,  $\iint_{S(C)} \vec{J} \cdot d\vec{S} = J \pi a^2$  y

$$\rho B(\rho) 2\pi = \mu_0 J \pi a^2 \rightarrow B(\rho) = \frac{\mu_0 J a^2}{2 \rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}$$

Por otra parte, si la curva tuviera un radio menor que  $a$ , lo que será diferente es la corriente concatenada

$$\rho B(\rho) 2\pi = \mu_0 I_{\text{concatenada por } C} = \mu_0 \iint_{S(C)} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 J \pi \rho^2, \text{ por lo que}$$

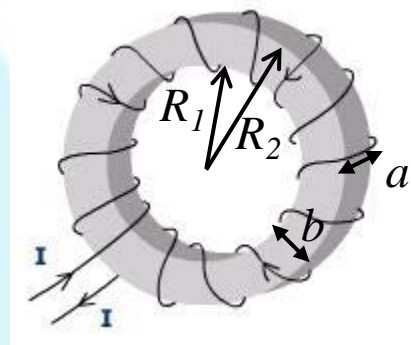
$$B(\rho) = \frac{\mu_0 J}{2} \rho = \frac{\mu_0 I}{2 \pi a^2} \rho$$

Si la curva hubiera sido elegida en sentido horario, el área hubiera tenido su normal en sentido contrario, por lo que el resultado hubiera sido el mismo.

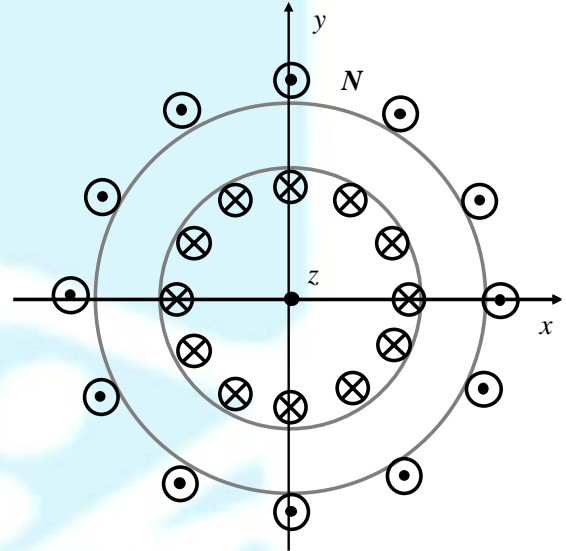
En consecuencia, ahora podemos escribir que

$$\vec{B}(\rho) = \begin{cases} \frac{\mu_0 J a^2}{2 \rho} \vec{e}_\varphi \\ \frac{\mu_0 J}{2} \rho \vec{e}_\varphi \end{cases}$$

### 7.9.2 Ejemplo 6: Toroide de $N$ espiras densamente arrolladas y sección rectangular



Como hemos visto, el campo generado por un toroide puede ser deducido a partir de la Ley de Biot-Savart. Pero nosotros hicimos una extensión de lo obtenido con el solenoide (aunque no escribimos su expresión). Ahora vamos a poder deducir su expresión a partir de la Ley de Ampere bajo determinadas condiciones. Si las espiras están densamente arrolladas, podemos inferir que el campo magnético estará confinado al interior y sus líneas copiarán el contorno (no nos metemos a indagar qué pasa en los bordes filosos porque estaríamos en problemas). Vamos a dibujar al toroide en el plano  $xy$ . Supongamos que la dimensión de la sección del toroide está dada por  $a$  y  $b$  ( $b = R_2 - R_1$ ). Los círculos con cruz indican que la corriente es entrante y las que tienen puntitos que es corriente saliente.



Con este sistema de coordenadas, y justificando con el campo en un solenoide (o superposición de espiras), podemos decir que  $\vec{B}(\vec{r}) = B(\vec{r}) \vec{e}_\varphi$ . Ya tenemos la dirección del campo. Ahora debemos establecer cuál es la probable dependencia con las coordenadas. Está claro que no puede depender de  $\varphi$  porque rotar el sistema de coordenadas (o el toroide) no va a cambiar el campo en un punto determinado y fijo del espacio. Si, además, consideramos que despreciamos los efectos de borde (en la dirección  $z$ ), podemos considerar que el campo no depende de  $z$ . Es decir, a lo sumo, dependerá de la distancia  $\rho$  al origen. Resumiendo, tendremos que  $\vec{B}(\vec{r}) = B(\rho) \vec{e}_\varphi$ . Y ahora así estamos en condiciones de elegir una curva donde podamos asegurar que el campo tiene el mismo valor sobre la misma (no la misma dirección). La curva será una circunferencia centrada en el origen de coordenadas. Dibujemos varias (con distintos radios) donde

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \oint_C B(\rho) \cdot d\vec{l} = \oint_C B(\rho) \vec{e}_\varphi \cdot R d\varphi \vec{e}_\varphi = B(\rho) R \oint_C d\varphi = \mu_0 I_{\text{concatenada}} = \mu_0 \iint_{S(C)} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Acá escribimos la corriente en su forma más general (como una **densidad volumétrica**  $\vec{J}$ ) aunque en este caso tenemos algo parecido a una **densidad superficial** de corriente  $\vec{K}$ .

Por la elección del sentido de las curvas  $C_1 - C_4$ , los  $\vec{dS}$  tiene sentido de los  $z$  positivos. Es

$$\text{decir, } \iint_{s(c)} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iint_{s(c)} \vec{J} \cdot dS \vec{e}_z = \iint_{s(c)} \vec{J} \cdot \vec{e}_z dS$$

1) Curva  $C_1$

$$\oint_{C_1} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = B(\rho) R \oint_{C_1} d\varphi = \mu_0 I_{\text{concatenada}} \cdot \text{Pero la}$$

curva no concatena corriente por lo que

$$B(\rho) R \oint_{C_1} d\varphi = B(\rho) R 2\pi = 0. \text{ La única}$$

posibilidad es que el campo sea nulo. Y esto se va a cumplir para cualquier curva tal que su radio sea menor que el  $R_1$ .

2) Curva  $C_2$

$$\oint_{C_2} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = B(R_{C_2}) R_{C_2} \oint_{C_2} d\varphi = B(R_{C_2}) R_{C_2} 2\pi.$$

¿Qué corriente concatena la curva? Como el arrollamiento del toroide tiene  $N$  espiras y por cada una circula una corriente  $I$ , uno estaría tentado a decir que  $I_{\text{concatenada}} = NI$ . Pero debemos tener cuidado. La “densidad de corriente  $\vec{J}$ ” es entrante, i.e., tiene sentido  $-\vec{e}_z$ .

$$\text{Entonces } \iint_{s(C_2)} \vec{J} \cdot \vec{e}_z dS = \iint_{s(C_2)} J(-\vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z dS = -NI. \text{ Entonces}$$

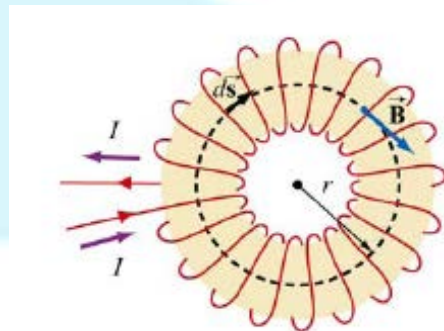
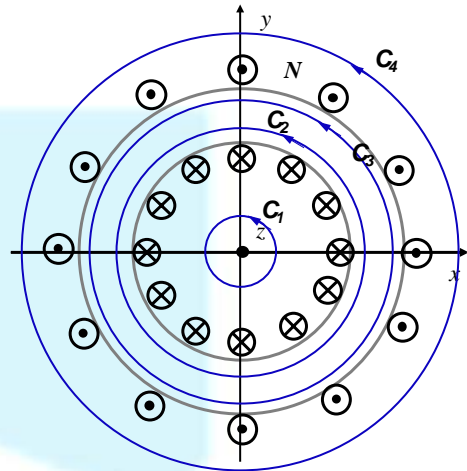
$$B(R_{C_2}) R_{C_2} 2\pi = -\mu_0 NI \rightarrow B(R_{C_2}) = -\mu_0 \frac{NI}{2\pi R_{C_2}}. \text{ Y como habíamos supuesto que}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = B(\rho) \vec{e}_\varphi, \text{ tendremos } \vec{B}(R_{C_2}) = -\mu_0 \frac{NI}{2\pi R_{C_2}} \vec{e}_\varphi. \text{ Observen que esto significa que el}$$

campo magnético tiene sentido contrario al tomado como positivo de la curva (que también tomamos como el del campo).

3) Curva  $C_3$ : el procedimiento es análogo al de la curva anterior. Podemos decir, entonces que dentro del toroide

$$\vec{B}(\rho) = -\mu_0 \frac{NI}{2\pi \rho} \vec{e}_\varphi$$



- 4) Curva  $C_4$ : En este caso debemos prestar atención a la corriente concatenada por la curva: hay  $N$  alambres en sentido de las  $z$  positivas, i.e.,  $NI$  y  $N$  alambres en sentido de las  $z$  negativas, i.e.,  $-NI$ . Consecuentemente, la corriente concatenada es nula. Y, haciendo el mismo razonamiento que en 1), concluimos que el campo es nulo fuera del toroide.

Podemos escribir, entonces que

$$\vec{B}(\rho) = \begin{cases} -\mu_0 \frac{NI}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi & R_1 < \rho < R_2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En algunas circunstancias, podría ser adecuado despreciar la variación del valor del campo dentro del toroide. En ese caso podríamos escribir

$$\vec{B}(\rho) = \begin{cases} -\mu_0 \frac{NI}{L} \vec{e}_\varphi & R_1 < \rho < R_2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde  $L$  es la longitud de la circunferencia media (o la más chica o la más grande... justamente estamos despreciando su variación). Observar que esta “fórmula” coincide con la de un solenoide infinito (cambiando el largo del solenoide por la circunferencia media del toroide).

**Nota final sobre Ley de Ampere integral: La discusión sobre el sentido de la densidad de corriente y el de la superficie puede parecer innecesario. Sin embargo, tenerlo en cuenta simplificará muchísimo la resolución de algunas situaciones o “problemas” en los que no es fácil determinar el sentido del campo “a ojo”.**

### 7.10. Forma diferencial de la Ley de Ampere en vacío para corrientes constantes

A partir de la Ley de Ampere en forma integral, es muy sencillo obtener la misma Ley pero en forma diferencial. A partir de la forma más general para campos magnetostáticos en vacío

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{A(C)} \vec{J} \cdot d\vec{A},$$

podemos aplicar el Teorema de Stokes y obtenemos

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{A(C)} \vec{J} \cdot d\vec{A} = \iint_{A(C)} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A}$$

Recordando las condiciones del Teorema de Stokes de Análisis II, podemos escribir la Ley de Ampere en forma diferencial:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

---

<sup>i</sup> Griffiths Capítulo 5 pag 215

<sup>ii</sup> *El solenoide... ¿es infinito?* María Luz Franqueiro, Gastón Manestar, Eduardo Poggio, Gabriel Raffa, Mariana Mesaros, Liliana I. Perez, Guillermo Santiago  
**Anales AFA, 21** 1-9 Rosario 2009 (2010) ISSN en línea 1850-1158. Asociación Física Argentina

<sup>iii</sup> Griffiths Capítulo 5

